

Спецкурс “Оптические микрорезонаторы”.
Лекция 7. Метод эйконала и геометрическое
приближение волновой оптики.

М.Л.Городецкий

15 апреля 2008 г.

**0.1 Метод эйконала в цилиндрических координатах. По-
лучение асимптотик цилиндрических функций**

Рассмотрим решение методом эйконала скалярной двумерной задачи о собственных колебаниях бесконечного цилиндра. Как мы показали ранее (см. Лекцию 4), решение этой задачи позволяет найти собственные моды бесконечного цилиндра и в хорошем приближении собственные решения для диэлектрического цилиндра. Кроме того, анализ решения позволит получить наглядное понимание того, что собой представляют моды типа шепчущей галереи с лучевой точки зрения. В этой лекции мы используем простейшие нулевые граничные условия. О том, как полученные результаты переносятся на случай диэлектрических резонаторов будет рассказано далее.

Уравнение для эйконала в цилиндрических координатах запишется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi}\right)^2 = n^2 \quad (1)$$

(2)

Решение этого уравнения можно найти методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{S}_\phi(\phi) + \mathcal{S}_\rho(\rho) + \mathcal{S}_0 \\ -\rho^2 \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\rho(\rho)}{\partial \rho}\right)^2 + n^2 \rho^2 &= \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\phi(\phi)}{\partial \phi}\right)^2 = \mathcal{M}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{S}_\phi(\phi)}{\partial \phi} &= \mathcal{M} \\ \mathcal{S}_\phi &= \frac{1}{k_0} m \phi \\ \frac{\partial \mathcal{S}_\rho(\rho)}{\partial \rho} &= \pm n \sqrt{1 - \frac{\mathcal{M}^2}{n^2 \rho^2}} = \pm n \sqrt{1 - \left(\frac{m}{k\rho}\right)^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
S_\rho &= \pm \frac{m}{k_0} \left[\sqrt{\left(\frac{k\rho}{m}\right)^2 - 1} - \arccos\left(\frac{m}{k\rho}\right) \right] = \\
&\pm \frac{1}{k_0} \left[\sqrt{n^2 k_0^2 \rho^2 - m^2} - m \arctan\left(\sqrt{\left(\frac{k\rho}{m}\right)^2 - 1}\right) \right] \quad (4)
\end{aligned}$$

Заменяя константу разделения \mathcal{M} на m/k_0 , где m – целое, мы учли требование непрерывности решения $A_0 e^{ik_0 S}$ при $\phi = 2\pi$, как и ранее, $k = nk_0$.

Рассмотрим теперь первое уравнение переноса. Домножив его на A_0 , переишем в более простом виде:

$$A_0(2\nabla A_0 \nabla S + A_0 \Delta S) = \nabla \cdot (A_0^2 \nabla S) = 0 \quad (5)$$

Подставляя сюда найденное решение для эйконала \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho A_0^2 \frac{\partial S}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(A_0^2 \frac{\partial S}{\partial \phi} \right) = \\
&\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{m}{k_0} A_0^2 \sqrt{\left(\frac{k\rho}{m}\right)^2 - m^2} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\pm \frac{1}{k_0} m A_0^2 \right) = 0 \quad (6)
\end{aligned}$$

Не теряя общности можно положить, что $\frac{\partial A_0}{\partial \phi} = 0$, поскольку в противном случае получающийся после разделения переменных фазовый множитель вида $e^{\nu\phi}$ можно было бы перенести в эйконал \mathcal{S} . В итоге получаем:

$$\begin{aligned}
A_0 &= C(k^2 \rho^2 - m^2)^{-1/4} \\
\Psi_\pm &= C_\pm \frac{1}{\sqrt[4]{k^2 \rho^2 - m^2}} e^{\pm im[\sqrt{(k\rho/m)^2 - 1} - \arctan(\sqrt{(k\rho/m)^2 - 1})] + im\phi} \quad (7)
\end{aligned}$$

Решения в области $k\rho < m$ берутся из полученных подстановкой $\sqrt{k^2 \rho^2 - m^2} = i\sqrt{m^2 - k^2 \rho^2}$. Линейные комбинации функций Ψ_+ и Ψ_- обеспечивают квазиклассические аппроксимации полей во всех областях, кроме непосредственно прилегающей к значениям $a_c = m/k$. В этой области условия квазиклассической аппроксимации $k^* \gg \frac{1}{V^*} \frac{\partial V^*}{\partial \rho}$ нарушаются. Получить приближение в этой области можно, воспользовавшись знакомым нам приближением Эйри для полного уравнения.

Задание 7.1 *Линеаризуя уравнение Гельмгольца вблизи точки поворота, показать, что получающееся решение плавно сшивается с квазиклассическим если положить, что при отражении от каустической поверхности происходит дополнительный набег фазы $\pi/2$. Для некоторого выбранного большого m построить графики для точного решения скалярного*

уравнения через функции Бесселя, квазиклассического приближения в области распространения и за каустикой и приближения через функцию Эйри

$$\begin{aligned}
J_m(z) &= \left(\frac{2}{m}\right)^{1/3} \text{Ai} \left[-\left(\frac{2}{m}\right)^{1/3} (z - m) \right] [1 + O(m^{-1})]_{|z \simeq m} \\
J_m(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{m^2 - z^2}}} \exp \left(\sqrt{m^2 - z^2} - m \text{arccosh} \frac{m}{z} \right) [1 + O(m^{-1})]_{|z < m} \\
J_m(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{z^2 - m^2}}} \cos \left[\sqrt{z^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{z} - \frac{\pi}{4} \right] [1 + O(m^{-1})]_{|z > m} \\
Y_m(z) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{m^2 - z^2}}} \exp \left[-\sqrt{m^2 - z^2} + m \text{arccosh} \frac{m}{z} \right] [1 + O(m^{-1})]_{|z < m} \\
Y_m(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{z^2 - m^2}}} \sin \left(\sqrt{z^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{z} - \frac{\pi}{4} \right) [1 + O(m^{-1})]_{|z > m} \\
Y_m(z) &= -\left(\frac{2}{m}\right)^{1/3} \text{Vi} \left[-\left(\frac{2}{m}\right)^{1/3} (z - m) \right] [1 + O(m^{-1})]_{|z \simeq m} \quad (8)
\end{aligned}$$

0.2 Нахождение собственных частот методом эйконала. Правила квантования.

В квазиклассическом приближении квантовой механики условие квантования Бора-Зоммерфельда выглядит следующим образом:

$$\oint k^* dx = 2\pi(q + 1/2), \quad (9)$$

где $q = 0, 1, 2 \dots$ Однако, как показал Келлер [1], такое условие квантования справедливо лишь при условии отражения волновой функции от двух гладких границ потенциальной ямы. Применение уточненных условий квантования позволило ему продемонстрировать, что метод эйконала является мощным и неожиданно весьма точным методом для расчета собственных частот разнообразных резонаторов [2].

В квазиклассическом приближении интеграл по замкнутому контуру означает, что луч, бегущий по этому контуру возвращается в исходную точку с той же фазой. Набег фазы приобретает как в ходе распространения, так и при отражении от границ. В методе эйконала роль локального волнового вектора играет величина $\mathbf{k}^* = \mathbf{k}_0 \nabla \mathcal{S}$ и условие квантования превращается в условие:

$$k_0 \oint \nabla \mathcal{S} ds = 2\pi q + \Delta_b, \quad (10)$$

Где Δ_b – набег фазы при отражении от различных границ.

Проще всего выбирать контур так, что направление волнового вектора было все время касательно к контуру. Если интегрирование ведется по одной координате, условие получается простым:

$$2k_0\mathcal{S}|_1^2 = 2\pi q + \Delta_b, \quad (11)$$

Рассмотрим условия отражения от границ потенциального барьера. Если на границе рассматриваемое поле u должно обращаться в ноль (как в случае тангенциальных компонент электрического поля на металлической поверхности), значит на границу $s = s_b$ приходится узел стоячей волны и $\psi \propto \sin[k^*(s - s_b)] = \frac{1}{2i}(e^{ik^*(x-sb)} + e^{-ik^*(x-sb)+i\pi})$, значит при этом на каждое отражение от поверхности при следовании вдоль контура надо добавить π . Если же требование состоит в равенстве нулю производной, то $\psi \propto \cos k^*(s - s_b) = \frac{1}{2}(e^{ik^*(x-sb)} + e^{-ik^*(x-sb)})$ и при отражении фазового сдвига не происходит. Особым случаем является отражение от каустической поверхности. Как показано в упражнении, непрерывность сшивки квазиклассического решения и решения линеаризованного уравнения вблизи точки поворота диктует необходимость добавления фазы $\pi/2$ при касании каустики. Таким образом, условия квантования запишутся следующим образом:

$$k_0 \oint \nabla \mathcal{S} ds = 2\pi(q + \frac{q'}{2} + \frac{q''}{4}), \quad (12)$$

где q' – количество отражений на рассматриваемом контуре от границ с краевым условием Неймана $u(s_b) = 0$, а q'' – количество касаний каустических поверхностей.

Теперь, воспользовавшись найденным решением для эйконала мы можем записать условия квантования и найти собственные значения:

$$\begin{aligned} k_0\mathcal{S}_\phi|_0^{2\pi} &= 2\pi m = 2\pi q_\phi & (13) \\ 2k_0\mathcal{S}_\rho|_{\rho_c}^a &= 2m \left[\sqrt{\left(\frac{ka}{m}\right)^2 - 1} - \arccos\left(\frac{m}{ka}\right) \right] = 2\pi(q_\rho + \frac{3}{4}) = 2\pi(q - \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что циклический интеграл по ρ включает одно касание каустики ($q'' = 1$) и одну границу ($q' = 1$) и то, что $S(\rho_c = m/k) = 0$. Из первого уравнения следует, что $q_\phi = m$. Для согласия с нумерацией корней функции Бесселя мы заменили q_ρ на $q = q_\rho + 1$. Второе уравнение позволяет найти приближенные собственные значения, но прежде чем это сделать, посмотрим, что означают записанные уравнения с квазигеометрической точки зрения. В цилиндрическом резонаторе, заполненном изотропной средой с постоянным показателем преломления n могут распространяться, согласно принципу наименьшего действия, только прямолинейные лучи, отражающиеся лишь от границы на окружности.

На Рис.1 показаны различные геометрические пути по которым могут распространяться лучи. Как видно, кроме вырожденного случая, когда лучи распространяются по диаметру, в остальных случаях они заполняют собой кольцо. Обозначим через a_c радиус внутренней окружности кольца (наружный радиус соответствует границе a) и выберем в качестве первого пути обхода эту внутреннюю окружность.

$$k2\pi a_c = 2\pi m \quad (14)$$

Второй контур выбираем так, как показано на Рис. 2. Он состоит из двух сопряженных отражением от поверхности лучей до каустической окружности и из стягивающей эти лучи дуги на этой же каустической окружности. В каждой точке на таком контуре лучи тангенциальны к поверхности, однако на каустической поверхности направление противоположно направлению распространения двух лучей:

$$2k[(a^2 - a_c^2)^{1/2} - a_c \arccos(a_c/a)] = 2\pi(q - 1/4) \quad (15)$$

Выражая из первого уравнения a_c , получаем выражение в точности совпадающее с тем, которое получается формальным решением уравнения эйконала (14).

Решение 14 можно искать в виде ряда:

$$\frac{nka}{m} = 1 + \sum_i^{\infty} c_j m^{-2j/3} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} nka &= m + \left(\frac{3\pi(q-1/4)}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{3}{20} \left(\frac{3\pi(q-1/4)}{2}\right)^{4/3} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} \\ &- \frac{1}{1400} \left(\frac{3\pi(q-1/4)}{2}\right)^2 \left(\frac{m}{2}\right)^{-1} + O(m^{-5/3}) \end{aligned} \quad (17)$$

Это решение можно сравнить с асимптотическим разложением аналитического решения, которым являются корни функции Бесселя [3]

$$\begin{aligned} t_{m,q} &= m - \alpha_q \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{3}{20} \alpha_q^2 \left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} + \frac{\alpha_q^3 + 10}{1400} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1} \\ &- \frac{479\alpha_q^4 - 40\alpha_q}{504000} \alpha_q^4 \left(\frac{m}{2}\right)^{-5/3} + O(m^{-8/3}) \end{aligned}$$

Сравнивая две аппроксимации, мы видим, что при формальной замене выражений $\beta_q = -\left(\frac{3\pi(q-1/4)}{2}\right)^{2/3}$ на нули функции Эйри α_q , ряды совпадают с точностью до члена порядка $O(m^{-1})$. Как следует из таблицы, β_q и α_q очень близки и относительная разница быстро стремится к нулю с ростом q .

| q | α_q | β_q | $\frac{\alpha_q - \beta_q}{\alpha_q}$ |
|----|------------|-----------|---------------------------------------|
| 1 | -2.338107 | -2.320252 | -0.007637 |
| 2 | -4.087949 | -4.081812 | -0.001501 |
| 3 | -5.520560 | -5.517165 | -0.000615 |
| 4 | -6.786708 | -6.784456 | -0.000331 |
| 5 | -7.944134 | -7.942489 | -0.000207 |
| 6 | -9.022651 | -9.021376 | -0.000141 |
| 7 | -10.04017 | -10.03914 | -0.000103 |
| 8 | -11.00852 | -11.00767 | -0.000087 |
| 9 | -11.93602 | -11.93528 | -0.000062 |
| 10 | -12.82878 | -12.82815 | -0.000049 |

Можно привести обоснование замены β_q на α_q . Дело в том, что вблизи каустики условия квазиклассического приближения нарушаются и, как было отмечено выше, в этой области лучшее приближение дает после линеаризации уравнения решение через функции Эйри. Сочетая оба подхода, можно получить равномерные аппроксимации уравнения второго порядка вблизи точки поворота ξ_c [4, 5]:

$$\psi'' + [k^2\mathcal{V}(\xi) + \mathcal{G}(\xi)]\psi = 0 \quad (18)$$

при $k \rightarrow \infty$ обеспечивает аппроксимация:

$$\psi = C \text{Ai}[\mathcal{F}(\xi)] \left[\sqrt[4]{\frac{\mathcal{F}(\xi)}{-\mathcal{V}(\xi)}} + O(k^{-1}) \right] \quad (19)$$

$$\mathcal{F}(\xi) = \left[\frac{3}{2}k \int_{\xi_c}^{\xi} \sqrt{-\mathcal{V}(\xi)} d\xi \right]^{2/3},$$

отсюда условие обращения функции в нуль приводит к уравнению:

$$k \int_{\xi_c}^{\xi_s} \sqrt{-\mathcal{V}(\xi)} d\xi = \frac{2}{3} \alpha_q^{3/2}, \quad (20)$$

что эквивалентно условию квазиклассического квантования по Келлеру с одним касанием каустики и одним отражением от границы с нулевыми граничными условиями с заменой β_q на α_q . Что и требовалось доказать.

Для функций Бесселя указанная равномерная аппроксимация приводит к прекрасному приближению во всех областях:

$$J_m(x) \simeq \left(\frac{-4\mathcal{F}}{x^2\mathcal{V}} \right)^{1/4} \text{Ai}(\mathcal{F})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= 1 - \frac{m^2}{k^2 r^2} = 1 - \frac{m^2}{x^2} \\
\mathcal{F} &= \left[\frac{3}{2} \left(-\sqrt{m^2 - x^2} + m \operatorname{arccosh} \frac{m}{x} \right) \right]^{2/3} \Big|_{x < m} \\
&= - \left[\frac{3}{2} \left(\sqrt{x^2 - m^2} - m \operatorname{arccos} \frac{m}{x} \right) \right]^{2/3} \Big|_{x > m}, \quad (21)
\end{aligned}$$

Здесь для удобства мы избавились от комплексностей. Аппроксимации имеют разрешимую неопределенность в точке $x = m$ в которой они принимают значение $(2/m)^{1/3} \operatorname{Ai}(0)$ в согласии с первым приближением в (8).

0.3 Уравнение эйконала в сфере

Рассмотрим теперь применение метода эйконала для сферы:

Сферическую гармонику в лучевом приближении можно представить себе как суперпозицию наклоненных циркулярных мод (см. Лекцию 6). Каустическими поверхностями в сфере являются внутренняя сфера радиусом a_c и два симметричных конуса, определяемые углами $\theta_{1,2c}$.

В качестве первого контура интегрирования выбираем круг на внутренней каустической сфере, лежащий в плоскости распространения такой наклоненной орбиты, касающейся сверху и снизу каустических конусов ($q'' = 2$) (Рис. 3), поэтому.

$$2\pi k a_c = 2\pi(\ell + 1/2) \quad (22)$$

Второй контур выбираем в этой же плоскости, аналогичный рассмотренному для цилиндра (Рис. 2), состоящий из двух лучей от внутреннего каустического круга до поверхности и стягивающей их дуги, лежащей на каустической сфере:

$$2k[(a^2 - a_c^2)^{1/2} - a_c \operatorname{arccos}(a_c/a)] = 2\pi(q - 1/4) \quad (23)$$

Третий контур выбираем в виде окружности на пересечении каустической сферы и каустических конусов.

$$2\pi k a_c \sin \theta_c = 2\pi m \quad (24)$$

0.4 Моды сфероида

В случаях сферы и цилиндра удастся точно найти собственные моды колебаний резонатора и соответствующие резонансные частоты, получить распределение поля внутри и вне резонатора, оценить энергетические потери.

Однако в общем случае, если резонатор представляет собой произвольное тело вращения, этого сделать нельзя, точных аналитических решений не существует, а численные методы, например метод конечных элементов, теряют свою эффективность, когда размеры резонатора значительно превышают длину волны. Приближение лучевой оптики (эйконала) — один из наиболее эффективных асимптотических методов оценки собственных частот мод типа шепчущей галереи в случае, когда точные решения найти не удастся [2]. Интересно рассмотреть этим методом моды эллипсоида вращения (сфероида), поскольку сфероидом, имеющим разную кривизну в азимутальном и меридиональном направлениях можно с хорошей точностью аппроксимировать поверхность тел вращения в приэкваториальной области распространения мод для различных торроидальных и дисковых резонаторах.

В [6, 7] получены весьма точные приближения для собственных частот в сфероиде и показано, как этот метод может быть применен к произвольному телу вращения. Уравнение Гельмгольца в сфероидальных координатах не разделяется [8], не удастся построить векторные гармоники, тангенциальные к поверхности сфероида. Поэтому в сфероиде не могут существовать чисто ТЕ или ТМ моды, а только гибридные. Было предложено несколько способов разделения переменных с помощью рядов разложения, использующих сфероидальные или сферические функции [9, 10, 11]. К сожалению, они ведут к чрезвычайно громоздким системам уравнений, которые решаются численно и полезны только для рассмотрения низших типов колебаний. В работе [12] выписано без доказательства точное характеристическое уравнение для собственных частот диэлектрического сфероида, которое, будь оно верным, могло бы существенно облегчить расчет собственных частот сфероида. К сожалению, это уравнение в частных предельных случаях с известными решениями (сфера, осесимметричные колебания сфероида с идеально отражающими стенками [13]) приводит к неверным результатам.

Тем не менее, в случае мод шепчущей галереи, прилегающих к экваториальной плоскости, энергия в основном сосредоточена в электрических компонентах либо тангенциальных, либо нормальных к поверхности. Такие моды мы будем обозначать, соответственно, как квази-ТЕ или квази-ТМ (используя соглашение, как в случае сферических, а не цилиндрических координатах, где в силу исторических причин соглашение обратное) и они могут быть с хорошим приближением проанализированы с помощью скалярного волнового уравнения.

0.5 Сфероидальная система координат

Введением слова сфероид в оборот мы обязаны Архимеду. Вот как он определяет этот термин (цитируется по [14], р.180):

"... мы полагаем следующее: если эллипс при сохранении неподвижной большей оси поворачивается, возвращаясь в исходное положение, то охватываемая им фигура будет называться вы-

тянутым сфероидом [*παραμακες σφαιροιδες*]. Если эллипс поворачивается при сохранении в неподвижности малой оси и возвращается назад, то охватываемая им фигура будет называться сплюснутым сфероидом [*επιπλατυ σφαιροιδες*]."

Ввести координаты для вытянутого и сплюснутого сфероида и соответствующие им сфероидальные функции можно несколькими эквивалентными способами [15, 16, 3]. Следующая система координат позволяет рассматривать одновременно обе геометрии:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2}[(\xi^2 - s)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos(\phi) \\ y &= \frac{d}{2}[(\xi^2 - s)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin(\phi) \\ z &= \frac{d}{2}\xi\eta, \end{aligned} \quad (25)$$

где d – расстояние между точками фокусов. Здесь мы ввели знаковую переменную s , которая равна $+1$ для вытянутой сфероидальной системы, в которой $\xi \in [1, \infty)$ определяет вытянутые сфероиды, а $\eta \in [-1, 1]$ описывает ортогональные им двуполостные гиперboloиды вращения (Рис.5, справа). Соответственно, $s = -1$ порождает сплюснутые сфероиды для $\xi \in [0, \infty)$ и однополостные гиперboloиды вращения (Рис.1, справа). Сфероиды чаще рассматриваются в связи с модами другого вида – "прыгающего мячика", которые соответствуют модам резонатора типа Фабри-Перо. Нас же интересуют моды внутри сфероида, прилегающие к его поверхности около экваториальной плоскости. Удобно обозначить полуось в этой плоскости через a , а полуось по оси симметрии z через b . В этом случае $d^2/4 = s(b^2 - a^2)$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{1 - (a/b)^{2s}}$. Параметры Ламэ для введенной системы координат имеют вид:

$$\begin{aligned} h_\xi &= \frac{d}{2} \left(\frac{\xi^2 - s\eta^2}{\xi^2 - s} \right)^{1/2}, \\ h_\eta &= \frac{d}{2} \left(\frac{\xi^2 - s\eta^2}{1 - \eta^2} \right)^{1/2}, \\ h_\phi &= \frac{d}{2} [(\xi^2 - s)(1 - \eta^2)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Скалярное уравнение Гельмгольца в сфероидальных координатах разделяется.

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0. \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2 - s) \frac{\partial}{\partial\xi}\psi + \frac{\partial}{\partial\eta}(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial\eta}\psi \\ &+ \left(c^2(\xi^2 - s\eta^2) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} - s \frac{m^2}{\xi^2 - s} \right) \psi = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

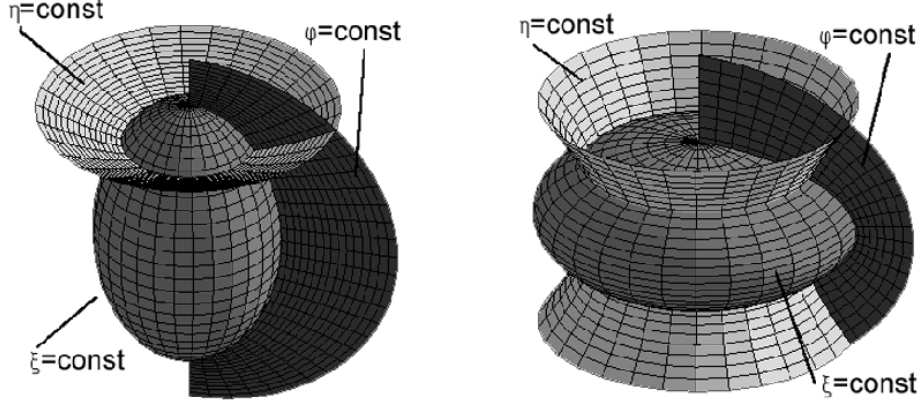


Рис. 1: Координатные системы вытянутого и сплюснутого сфероидов (ξ , η , ϕ).

где $c = kd/2$. Решение $\psi = R_{ml}(c, \xi)S_{ml}(c, \eta)e^{im\phi}$, где радиальные и угловые сфероидальные функции определяются следующими уравнениями:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^2 - s) \frac{\partial R}{\partial \xi} - \left(\lambda_{ml} - c^2 \xi^2 + s \frac{m^2}{\xi^2 - s} \right) R = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(1 - \eta^2) \frac{\partial S}{\partial \eta} + \left(\lambda_{ml} - sc^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right) S = 0. \quad (30)$$

Здесь λ_{ml} – константа разделения уравнений, которая независимо определяется и является функцией m , l и c . Подстановкой $\xi = 2r/d$ первое уравнение переходит в уравнение для сферических функций Бесселя $j_l(kr)$ в пределе $d/2 \rightarrow 0$, при этом второе уравнение обращается в уравнение для присоединенных полиномов Лежандра $P_m^l(\eta)$, а $\lambda_{m,l} = l(l+1)$. Поэтому сфероидальные функции часто анализируются разложением их в ряды по сферическим функциям.

Вычисление сфероидальных функций и собственных значений $\lambda_{ml}(c)$ является нетривиальной задачей [17, 18]. Можно было бы предположить, что приближение сфероидальных функций и их нулей является более последовательным способом нахождения приближений для собственных частот сфероидов, однако оказывается, что метод эйконала обеспечивает лучшие результаты и гораздо более нагляден.

Нас интересуют моды шепчущей галереи, когда поле сосредоточено вблизи поверхности и экваториальной плоскости резонатора. В сфероидальной системе координат уравнение эйконала разделяется, если положить

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\xi(\xi) + \mathcal{S}_\eta(\eta) + \mathcal{S}_\phi(\phi) + \mathcal{S}_0:$$

$$\begin{aligned} & \frac{\xi^2 - s}{\xi^2 - s\eta^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\xi(\xi)}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - s\eta^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\eta(\eta)}{\partial \eta} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{(\xi^2 - s)(1 - \eta^2)} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\phi(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 = \frac{n^2 d^2}{4}. \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\phi}{\partial \phi} \right) = \mathcal{M} \\ & \frac{\partial \mathcal{S}_\xi(\xi)}{\partial \xi} = \pm \left(\frac{n^2 d^2 \xi^2}{4(\xi^2 - s)} - \frac{\mathcal{N}^2}{\xi^2 - s} - \frac{s\mathcal{M}^2}{(\xi^2 - s)^2} \right)^{1/2}, \\ & \frac{\partial \mathcal{S}_\eta(\eta)}{\partial \eta} = \pm \left(\frac{\mathcal{N}^2}{1 - \eta^2} - \frac{sn^2 d^2 \eta^2}{4(1 - \eta^2)} - \frac{\mathcal{M}^2}{(1 - \eta^2)^2} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (32)$$

что после простых преобразований превращается в:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\xi(\xi) &= \pm \frac{nd}{2} \int \frac{\sqrt{(\xi^2 - \xi_c^2)(\xi^2 - s\eta_c^2)}}{\xi^2 - s} d\xi \\ \mathcal{S}_\eta(\eta) &= \pm \frac{nd}{2} \int \frac{\sqrt{(\eta_c^2 - \eta^2)(\xi_c^2 - s\eta^2)}}{1 - \eta^2} d\eta \\ \mathcal{S}_\phi(\phi) &= \frac{m}{k_0} \phi, \end{aligned} \quad (33)$$

где, как и ранее, из условия цикличности фазы $ik_0\mathcal{S}_\phi$ мы определили, что $\mathcal{M} = m/k_0$, где m - целое, а введенные константы, характеризующие каустические поверхности:

$$\begin{aligned} \eta_c^2 &= \frac{2s\mathcal{N}^2}{n^2 d^2} \left[1 + \frac{sn^2 d^2 s}{4\mathcal{N}^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{sn^2 d^2}{4\mathcal{N}^2}\right)^2 - \frac{sn^2 d^2}{\mathcal{N}^2} \eta_0^2} \right], \\ \xi_c^2 &= \frac{2\mathcal{N}^2}{n^2 d^2} \left[1 + \frac{sn^2 d^2}{4\mathcal{N}^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{sn^2 d^2}{4\mathcal{N}^2}\right)^2 - \frac{sn^2 d^2}{\mathcal{N}^2} \eta_0^2} \right] \\ &= \frac{4\mathcal{N}^2}{n^2 d^2} + s(1 - \eta_c^2), \end{aligned} \quad (34)$$

$\eta_0^2 = 1 - \mathcal{M}^2/\mathcal{N}^2$, \mathcal{M} и \mathcal{N} — константы разделения. Уравнение эйконала описывает лучи, которые распространяются внутри резонатора, отражаясь от его поверхности. Лучи касаются внутренней каустики — сфероиды ξ_c и распространяются, прилегая к геодезическим кривым на нем. В идеальной сфере все лучи одного семейства лежат в одной плоскости, но даже небольшой эксцентриситет снимает это вырождение и приводит к прецессии траекторий вокруг оси z [19]. Геодезические линии приобретают вид незамкнутых спиралей, наматывающихся на каустический сфероид, при этом верхняя и нижняя точки этих траекторий задают другую каустическую

поверхность, которая является двуполостным гиперboloидом, если резонатор является вытянутым сфероидом и однополостным гиперboloидом, если сфероид сплюснутый.

Обратимся теперь к квазиклассической лучевой интерпретации [2, 20]. Уравнение эйконала описывает прямые лучи, которые распространяются внутри сфероида, касаются поверхности резонатора и отражаются. Для мод типа шепчущей галереи угол отражения близок к $\pi/2$. Эти лучи формируют каустическую поверхность, (в нашем случае это вложенный сфероид, определяемый параметром ξ_c). Лучи являются касательными к поверхности внутреннего каустического сфероида и распространяются вдоль геодезических кривых на нем. В случае идеальной сферы все лучи одного семейства лежат в одной плоскости. Однако это вырождение пропадает даже в случае небольшого эксцентриситета и тогда замкнутые моды в виде окружностей, которые будет правильнее называть квазимоды, благодаря прецессии вокруг каустики (см. Лекцию 6), превращаются в незамкнутые спиральные трехмерные кривые, которые наматываются на внутренний эллипсоид. Верхняя и нижняя точки этих траекторий на каустической поверхности задают еще одну каустическую поверхность η_c , которая будет двуполостным гиперboloидом в случае вытянутого сфероида и однополостным гиперboloидом в случае сплюснутого сфероида. Для величины η_c можно привести простую механическую интерпретацию. В методе эйконала лучи соответствуют траекториям движения точечных бильярдных шаров внутри резонатора. В аксиально-симметричных телах проекция углового момента таких шаров на ось z , а также их кинетическая энергия сохраняется. Поэтому η_c просто соответствует величине угла между экваториальной поверхностью и траекторией, по которой шар пересекает экватор, и в то же время, эта величина определяет максимальное удаление траектории шара от экватора.

В рамках квазиклассической лучевой интерпретации метода эйконала требуется применить условия согласования фаз при циклическом изменении каждой из координатных функций $\mathcal{S}_{\xi, \eta, \phi}$, что приводит к уравнениям для собственных значений задачи:

$$\begin{aligned} 2k\mathcal{S}_{\xi}|_{-\xi_c}^{\xi_s} &= 2\pi(q - 1/4) \\ 2k\mathcal{S}_{\eta}|_{-\eta_c}^{\eta_c} &= 2\pi(p + 1/2) \\ k\mathcal{S}_{\phi}|_0^{2\pi} &= 2\pi|m|, \end{aligned} \tag{35}$$

где ξ_s – сфероид, соответствующий поверхности резонатора, q, p, m – целые числа, при этом $p \geq 0, q > 1$. При составлении уравнений учитывают особенности поведения фазы луча при касании каустика и отражении от поверхностей. Каждое касание каустики добавляет фазу $\pi/2$, а отражение добавляет π . Эти же уравнения можно получить методом, предложенным В.П.Быковым [21], при этом полученные формально решения эйконала приобретают наглядную интерпретацию. Интеграл для \mathcal{S}_{ξ} соответствует разнице в длине двух геодезических путей на каустической поверхности η_c между двумя точками $P_1 = (\xi_c, \eta_c, \phi_1)$ и $P_2 = (\xi_c, \eta_c, \phi_2)$ (рис.1). Первый путь следует от окружности, по которой пересекаются каустические поверхности ξ_c

и η_c вдоль η_c к границе поверхности резонатора ξ_s , отражается от нее и возвращается обратно на ту же окружность, а второй – дуга окружности между точками P_1 и P_2 . Интеграл для \mathcal{S}_η соответствует разнице длин путей, первый из которых идет по поверхности ξ_c от точки P'_1 , спускается к $-\eta_c$ и возвращается к η_c в точке P'_2 , а второй дуге окружности между точками P'_1 и P'_2 . Третий интеграл соответствует просто длине окружности пересечения каустических поверхностей ξ_c и η_c . В итоге, для \mathcal{S}_ξ мы имеем один каустический сдвиг фазы $\pi/2$ на ξ_c и одно отражение от поверхности сфероида, для \mathcal{S}_η имеем каустический сдвиг $2 \times \pi/2$ на η_c и на $-\eta_c$, \mathcal{S}_ϕ не имеет дополнительных сдвигов фазы. Такая интерпретация является более общей и справедлива в тех случаях, когда в явном виде не удается выписать решения эйконала.

Выписанные интегралы можно выразить через эллиптические, что вряд ли интересно:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\xi(\xi) &= \pm \frac{nd}{2\xi_c} \left[\xi_0^2 \mathbf{E} \left(\frac{\sqrt{s}\xi}{\eta_c}, \frac{\sqrt{s}\eta_c}{\xi_c} \right) - s(1 - \eta_c^2) \mathbf{F} \left(\frac{\sqrt{s}\xi}{\eta_c}, \frac{\sqrt{s}\eta_c}{\xi_c} \right) \right. \\ &\quad \left. - (\xi_c^2 - s\eta_c^2)(1 - \eta_c^2) \mathbf{\Pi} \left(\frac{\sqrt{s}\xi}{\eta_c}, \eta_c^2, \frac{\sqrt{s}\eta_c}{\xi_c} \right) \right] \\ \mathcal{S}_\eta(\eta) &= \pm \frac{nd}{2\xi_c} \left[\xi_0^2 \mathbf{E} \left(\frac{\eta}{\eta_c}, \frac{\sqrt{s}\eta_c}{\xi_c} \right) - s(1 - \eta_c^2) \mathbf{F} \left(\frac{\eta}{\eta_c}, \frac{\sqrt{s}\eta_c}{\xi_c} \right) \right. \\ &\quad \left. - (\xi_c^2 - s\eta_c^2)(1 - \eta_c^2) \mathbf{\Pi} \left(\frac{\eta}{\eta_c}, \eta_c^2, \frac{\sqrt{s}\eta_c}{\xi_c} \right) \right],\end{aligned}\quad (36)$$

где $\mathbf{F}(z, k)$, $\mathbf{E}(z, k)$, $\mathbf{\Pi}(z, \nu, k)$ – эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода [3].

Однако в случае мод типа шепчущей галереи, когда $\eta_c \ll 1$ и $\xi_s - \xi_c \ll \xi_s$ \mathcal{S}_ξ , \mathcal{S}_η можно разложить в ряд и проинтегрировать, используя подстановки $\eta = \eta_c \sin \psi$, $\zeta = (\xi^2 - \xi_c^2)/\xi_c^2$. В итоге, выражая ξ_s через параметры сфероида, получаем:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\xi &= \frac{nb^3}{2a^2\sqrt{1+\zeta_0}} \int \frac{\sqrt{\zeta}\sqrt{1+\zeta-\eta_c^2(1+\zeta_0)(b^2-a^2)/b^2}}{(1+\zeta_0+(\zeta-\zeta_0)b^2/a^2)\sqrt{1+\zeta}} d\zeta \\ &= \frac{nb^3}{2a^2\sqrt{1+\zeta_0}} \left[\frac{2}{3}\zeta^{3/2} - \frac{10a^2-4b^2}{15a^2}\zeta^{5/2} + \frac{a^2-b^2}{3b^2}\zeta^{3/2}\eta_c^2 \right] \\ &\quad + O(\zeta^{7/2}, \eta_c^2\zeta^{5/2}, \eta_c^4\zeta^{3/2}) \\ \mathcal{S}_\eta &= \frac{nd}{2}\eta_c^2 \int \frac{\cos^2\psi\sqrt{\xi_c^2-s\eta_c^2\sin^2\psi}}{1-\eta_c^2\sin^2\psi} d\psi \\ &= \frac{nd}{2}\eta_c^2\xi_c \left[\frac{2\psi+\sin 2\psi}{4} + \frac{(2\xi_c^2-s)(4\psi-\sin 4\psi)}{64\xi_c^2}\eta_c^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(8\xi_c^4-4s\xi_c^2-1)(12\psi+\sin 6\psi-3\sin 4\psi-3\sin 2\psi)}{1536\xi_c^4}\eta_c^4 \right. \\ &\quad \left. + O(\eta_c^6) \right]\end{aligned}\quad (37)$$

$$\mathcal{S}_\phi = \mu\phi,$$

Теперь мы должны решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
k\Delta\mathcal{S}_\xi &= 2k\mathcal{S}_\xi(\zeta_0) \\
&\simeq \frac{2b^3 nka}{3a^3\sqrt{1+\zeta_0}} \zeta_0^{3/2} \left(1 - \frac{5a^2 - 2b^2}{5a^2} \zeta_0 - \frac{b^2 - a^2}{2b^2} \eta_r^2\right) \\
&= 2\pi(q - 1/4) \\
k\Delta\mathcal{S}_\eta &= k\mathcal{S}_\eta(2\pi) \\
&\simeq \pi \frac{nk b}{\sqrt{1+\zeta_0}} \eta_r^2 \left(1 + \frac{a^2 + b^2}{8b^2} \eta_r^2\right) \\
&= 2\pi(p + 1/2) \\
k\Delta\mathcal{S}_\phi &= 2\pi k\mu = 2\pi \frac{nka}{\sqrt{1+\zeta_0}} \sqrt{1 - \frac{\zeta_0(b^2 - a^2)}{a^2}} \sqrt{1 - \eta_r^2} \\
&= 2\pi|m|, \tag{38}
\end{aligned}$$

Используя метод последовательных приближений, начиная, например, с грубой оценки $nk_0^{(0)}a = \ell$, $\zeta_0^{(0)} = 0$, $\eta_r^{(0)} = 0$ эту систему можно разрешить:

$$\begin{aligned}
\eta_r^2 &= \frac{(2p+1)a}{b} \ell^{-1} \left[1 + \frac{\beta_q(b^2 - a^2)}{2b^2} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3}\right] + O(\ell^{-2}) \\
\zeta_0 &= \frac{-\beta_q a^2}{b^2} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3} \left[1 - \frac{\beta_q(5a^2 - 3b^2)}{5b^2} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3}\right] \\
&\quad + O(\ell^{-5/3}) \\
nka &= nka = \ell - \beta_q \left(\frac{\ell}{2}\right)^{1/3} + \frac{2p(a-b) + a}{2b} + \frac{3\beta_q^2}{20} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-1/3} \\
&\quad - \frac{\beta_q}{12} \frac{2p(a^3 - b^3) + a^3}{b^3} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3} + O(\ell^{-1}), \tag{39}
\end{aligned}$$

где для удобства сравнения мы ввели коэффициенты $\beta_q = -[\frac{3}{2}\pi(q - \frac{1}{4})]^{2/3}$.

Первые три члена в разложении для $y = nka$ были вычислены различными способами ранее в работах [22, 21, 23, 24], а три последних получены впервые.

Для проверки аналитических результатов мы решали скалярную задачу с нулевыми граничными условиями на собственные частоты в сфероиде для моды с $l = m = 100$ методом конечных элементов (ФЕМ) (Рис. 7). Как видно, полученное нами аналитическое приближение значительно лучше, чем те, что были получены ранее. Расхождения ряда для большой величины эксцентриситета объясняется тем, что приближение для интегралов, которое мы использовали, становится в этом случае не удовлетворительным, но метод, тем не менее, не теряет своей силы. Точнее говоря, в этом случае η_c становится сравнимо по величине с ξ_c и не может быть использовано в разложении как малый параметр.

Если положить $a = b$, то все шесть членов ряда совпадут с разложением нулей функции Бесселя со следующим отличием: 1) в квазиклассическом разложении на месте нулей функции Эйри $\alpha_q \simeq (-2.3381, -4.0879, -5.5206, \dots)$ стоят аналитические выражения β_q ($\alpha_q - \beta_q \simeq -0.017; -0.0061; -0.0033, \dots$). Это связано с тем, что на каустической поверхности метод эйконала не работает и нужно пользоваться более точным разложением с использованием функций Эйри [23], поэтому, чтобы улучшить наше решение при больших ℓ , можно и в нем формально заменить β_q на α_q . При малых же $\ell < 500$ квазиклассическое разложение оказывается точнее (Рис. 8).

Для приложений полезно рассчитать зависимость расстояния между соседними модами от трех индексов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \ell} &\simeq \ell^{-1} \left[1 + \frac{\alpha_q}{3} \left(\frac{\ell}{2} \right)^{-2/3} \right] \\ \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial m} &\simeq \frac{b-a}{b} \ell^{-1} \left[1 - \frac{\alpha_q}{6} \frac{(a+2b)(a-b)}{b^2} \left(\frac{\ell}{2} \right)^{-2/3} \right] \\ \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial q} &\simeq \frac{\pi}{2\sqrt{-\alpha_q}} \left(\frac{\ell}{2} \right)^{-2/3} \left[1 + \frac{4\alpha_q}{5} \left(\frac{\ell}{2} \right)^{-2/3} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

Эти приближения имеют точность порядка $O(l^{-2})$.

Из разложения решения уравнения эйконала в сфере можно показать, что квазиклассическое приближение имеет ошибку порядка $O(\ell^{-1})$, такого же порядка должна быть ошибка при подстановке векторных уравнений вместо скалярных. Таким образом, если размер резонатора составляет около сотни микрометров, то относительная погрешность будет порядка 10^{-6} .

Интересно, что в случае, когда $a = 2b$ (сплюснутый сфероид с эксцентриситетом $\sqrt{0.75}$, разность между собственными частотами в первом порядке приближения между модами с одним и тем же ℓ , которую определяет третий член, становится равной разнице между частотами при разных ℓ и одних и тех же $\ell - m$ (область свободной дисперсии). Разница возникает только в членах порядка . Эта ситуация похожа на случай, который экспериментально наблюдался в [22]. Такое новое вырождение может иметь простую квазигеометрическую интерпретацию - как и в случае со сферой, геодезические линии, наклоненные к экватору, становятся замкнутыми, возвращаются в ту же точку после полного оборота, но пересекают экватор не дважды, как в случае сферы, а четыре раза.

Список литературы

- [1] J. Keller, Ann. Phys. **4**, 180 (1958).
- [2] J.V. Keller, S.I. Rubinow, Ann. Phys. **9**, 24 (1960).

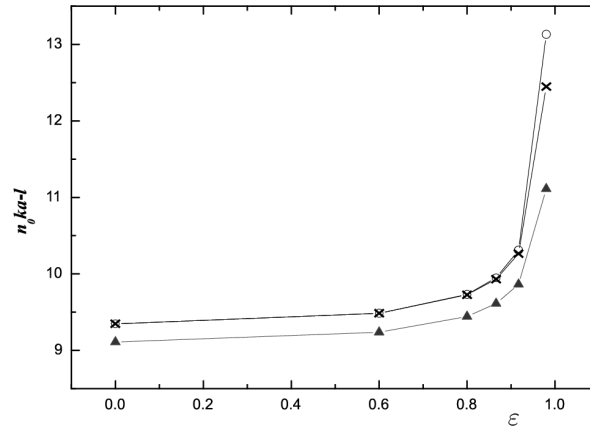


Рис. 2: Сравнение точности вычислений собственных частот в сфероиде по формуле 39 (кружки) и численно методом конечных элементов (крестики) для $\ell = m = 100$. Для сравнения показан (треугольники) результат известных ранее аппроксимаций.

- [3] М. Абрамовиц и И. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, Москва, 1979.
- [4] В.М.Бабич, Н.С.Григорьева, *Записки научных семинаров ЛОМИ* **42**, 12 (1973).
- [5] R.E.Langer, *Transactions of the American Mathematical Society* **67**, 461 (1949).
- [6] А.Е. Fomin, M.L. Gorodetsky, *IEEE J.Selected Topics in QE* **12**, 33 (2006).
- [7] М.Л. Городецкий, А.Е.Фомин, *Квант. электроника* **37**, 167 (2007).
- [8] R. Janaswamy, *IEEE Trans. Ant. Prop.* **52**, 2474 (2004).
- [9] S.Asano, G.Yamamoto, *Appl. Opt.* **14**, 29 (1975).
- [10] V.G. Farafonov, N.V. Voshchinnikov, *Astrophys. and Space Sci.* **204**, 19 (1993).
- [11] A.Charalambopoulos, D.I.Fotiadis, C.V. Massalas, *Comput. Phys. Comm.* **139**, 153 (2001).
- [12] P.C.G. de Moraes, L.G. Guimarães, *Appl. Opt.* **41**, 2955 (2002).
- [13] L. Li, Z. Li, M. Leong, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **51**, 922 (2003).

- [14] L. Russo, *The forgotten revolution*, Springer, Berlin, 2004.
- [15] . . И.В.Комаров, Л.И.Пономарев, *Сфероидальные и кулоновские сфероидалные функции*, М., Наука, 1976.
- [16] M. L.Li, X.Kang, *Spheroidal Wave Functions in Electromagnetic Theory*, John Wiley & Sons, 2002.
- [17] P.C.G. de Moraes, L.G. Guimarães, J. of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **79-80**, 973 (2003).
- [18] P.C.G. de Moraes, L.G. Guimarães, J. of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **74**, 757 (2002).
- [19] M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko, Opt. Comm. **113**, 133 (1994).
- [20] В.М. Бабич, В.С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, М.: Наука, 1972.
- [21] В.П. Быков, Электроника больших мощностей **4**, 66 (1965).
- [22] X. S. Y. V. S. Ilchenko, M. L. Gorodetsky and L. Maleki, Opt. Lett. **26**, 256 (2001).
- [23] Л.А. Вайнштейн, Электроника больших мощностей **3**, 176 (1964).
- [24] . . Вайнштейн, *Открытые резонаторы и открытые волноводы*, М., Советское радио, 1966.