

Спецкурс “Оптические микрорезонаторы”.  
Лекция 6. Моды шепчущей галереи в  
произвольных телах вращения

М.Л.Городецкий

15 апреля 2008 г.

## 1 Асимптотика решений скалярного волнового уравнения

Ранее были рассмотрены моды шепчущей галереи в круговых цилиндрических и сферических телах. К сожалению, соответствующие координатные системы практически исчерпывают класс систем координат, в которых векторные уравнения допускают разделение переменных и решения выписываются в явном виде (см. Лекцию 2). Между тем, большой интерес представляют резонаторы, форма которых отлична от сферической или цилиндрической. Так, в частности, уплощение резонатора позволяет избавиться от большой плотности частотного спектра собственных мод [1, 2]. Технология прецизионного микрокаменного точения позволяет получать осесимметричные резонаторы с произвольной образующей не только из стекол, но и из кристаллических материалов [3].

Для получения приближенного решения для мод шепчущей галереи в произвольных телах ограничимся скалярным уравнением, поскольку у мод высокого порядка для двух типов колебаний основная часть энергии сконцентрирована в одной из компонент, направленных в экваториальной плоскости, вблизи которой циркулирует мода приблизительно вдоль оси  $z$   $E_z$  ( $E_\theta$ ) или  $H_z$  ( $H_\theta$ ), а  $z$  компонента поля подчиняется скалярному уравнению Гельмгольца.

Введем естественную ортогональную систему координат  $(\xi, \eta, \phi)$  для тела вращения с поверхностью  $\rho = \rho(z)$  таким образом, чтобы  $\xi$  являлась длиной нормали от поверхности к данной точке, а  $\eta$  — длина дуги на поверхности резонатора от экватора до нормали. Например, в сферической системе координат эти новые координаты линейно связаны со сферическими:  $\xi = a - r$ ,  $\eta = a(\pi/2 - \theta)$ . В этих координатах уравнение Лапласа запишется следующим образом ([4], с.138):

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0$$

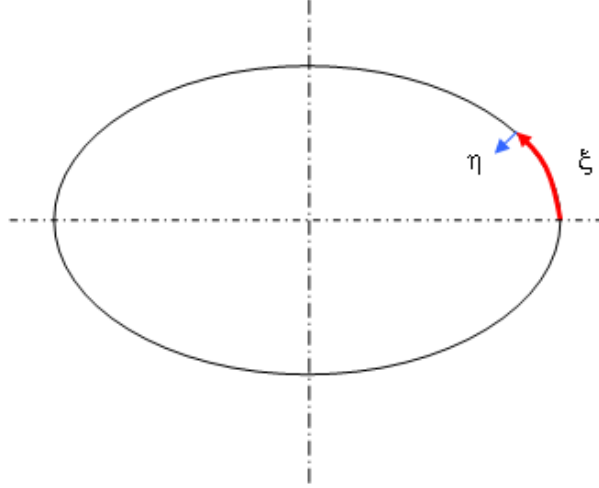


Рис. 1: Система приповерхностных координат для расчета мод шепчущей галереи

$$\begin{aligned}
h_\xi &= 1 \\
h_\eta &= 1 - \frac{\xi}{r_k(\eta)} \\
h_\phi &= \rho(\xi, \eta) = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\nabla^2 &= \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta h_\phi}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi h_\phi}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{h_\eta h_\xi}{h_\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{\xi}{r_k} \right)^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \rho \left( 1 - \frac{\xi}{r_k} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \rho \left( 1 - \frac{\xi}{r_k} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $r_k$  – локальный радиус кривизны образующей поверхности.

$$r_k = \left[ 1 + \left( \frac{d^2 \rho}{dz^2} \right)^2 \right]^{3/2} / \frac{d^2 \rho}{dz^2} \tag{2}$$

Если эта кривизна мало меняется в области распространения моды шепчущей галереи, что, например, строго выполняется для сферы и тора, то:

$$\begin{aligned}
r_k(\eta) &\simeq r_k(0) \\
\rho &= a - r_k + (r_k - \xi) \cos(\eta/r_k) \simeq a \left( 1 - \frac{\eta^2}{2ar_k} \right) \left( 1 - \frac{\xi}{a} \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

При этих приближениях, производя следующую замену переменных

$$\Phi = R(\xi)S(\eta) \left(1 - \frac{\eta^2}{2ar_k}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{\xi}{r_k}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{\xi}{a}\right)^{-1/2}, \quad (4)$$

и раскладывая все коэффициенты до членов порядка  $\xi$  и  $\eta^2$  можно произвести разделение переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + \left[ \lambda_{lm} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{r_k^2} \right) - \eta^2 \left( \frac{m^2}{a^3 r_k} - \frac{1}{4a^2 r_k^2} \right) \right] S &= 0 \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + \left[ k^2 - \frac{m^2}{a^2} - \lambda_{lm} + \xi \left( \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r_k} \right)^2 - \frac{2m^2}{a^3} - \frac{2\lambda_{lm}}{r_k} \right) \right] R &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

**Задание 6.1** Вывести эти уравнения.

Теперь заменой переменных  $\tilde{\theta} = \eta \left( \frac{m^2}{a^3 r_k} - \frac{1}{4a^2 r_k^2} \right)^{-1/4}$  мы получаем уравнение для функций Гаусс-Эрмита  $S(\tilde{\theta}) = e^{-\tilde{\theta}^2/2} H_p(\tilde{\theta})$ :

$$S'' + (2p + 1 - \tilde{\theta}^2)S = 0, \quad (6)$$

где  $H_p$  полином Эрмита порядка  $p$ . Константа разделения находится из условия целочисленности  $p$ :

$$\lambda_{mn} = (2p + 1) \left( \frac{m^2}{a^3 r_k} - \frac{1}{4a^2 r_k^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{r_k^2} \right) \quad (7)$$

Это уравнение заменой переменных

$$\zeta = \left( 2m^2 + 2\lambda_{lm} \frac{a^3}{r_k} - \frac{1}{2} (1 - a/r_k)^2 \right)^{1/3} \frac{\xi}{a} - \frac{k^2 a^2 - m^2 - \lambda_{lm} a^2}{[2m^2 + 2\lambda_{lm} a^3 / r_k - \frac{1}{2} (1 - a/r_k)^2]^{2/3}}$$

сводится к уравнению для функции Эйри.

$$\begin{aligned} R(\zeta)'' - \zeta R(\zeta) &= 0 \\ R(\zeta) &= Ai(\zeta) \end{aligned} \quad (8)$$

Если потребовать равенство нулю на границе  $R(\xi = 0) = 0$  и, соответственно,  $\zeta = \alpha_q$ , то мы можем найти собственные асимптотические значения  $ka$ :

$$ka = l - \alpha_q \left( \frac{l}{2} \right)^{1/3} + \sqrt{\frac{a}{r_k}} (p + 1/2) - p + \frac{\alpha_q^2}{4} \left( \frac{l}{2} \right)^{-1/3} + O(l^{-2/3}) \quad (9)$$

Это решение совпадает с более точным решением, которое мы получим позднее, вплоть до последнего члена, который должен быть равен  $\frac{3\alpha_q^2}{20} \left( \frac{l}{2} \right)^{-1/3}$ .

## 2 Угловые сферические функции в квантовой механике

У мод типа шепчущей галереи  $TE(TM)_{\ell m q}$  ( $\ell \sim m, q \ll \ell$ ) электромагнитное поле сосредоточено в кольцевой "экваториальной" области вблизи поверхности резонатора. При этом максимальная концентрация поля достигается для мод типа  $TE(TM)_{\ell \ell 1}$ , ( $\ell = m, q = 1$ ), которые имеют один узкий максимум ( $\Delta\theta \sim 1/\sqrt{\ell}$ ) в "меридианальном" и радиальном ( $\Delta r/r \sim \ell^{-2/3}$ ). Такие моды будут называться в дальнейшем фундаментальными модами шепчущей галереи).

Угловые функции в сферическом резонаторе – те же самые, которые появляются при решении квантовой задачи о движении электрона в центральном поле. Поэтому существует тесная аналогия между электронным облаком в атоме и модами сферических резонаторов. Обычно в атомах рассматривают моды низкого порядка с небольшим главным квантовым числом  $n$  и, соответственно, азимутальным квантовым числом  $\ell$  и  $m$ . Однако в современной экспериментальной квантовой физике широко применяются так называемые возбужденные ридберговские атомы с электроном, находящимся на дальнем уровне с большим номером  $n$ . Такие атомы имеют квантовые переходы, лежащие в СВЧ диапазоне, и позволяют осуществлять эксперименты на уровне взаимодействия отдельных атомов с отдельными фотонами. При этом наибольшей чувствительностью к внешним воздействиям и наибольшее время жизни имеют состояния, имеющие максимальный угловой и магнитный момент и соответствующие максимальным значениям чисел  $\ell$  и  $m$  [5]. Электронные облака в таких атомах соответствуют фундаментальным модам шепчущей галереи сферических резонаторов.

Фундаментальные моды с  $\ell = m$  можно интерпретировать как узкие гауссовы пучки, испытывающие многократное полное внутреннее отражение от внутренней поверхности сферы и циркулирующие в экваториальной плоскости. Расширение этой квазигеометрической интерпретации на моды с  $\ell \neq m$  не является вполне очевидной. Попробуем разобраться. С ростом разности  $\ell - m$ , "широтное" распределение становится быстро осциллирующей функцией по  $\theta$  с резким обрезанием вблизи углов  $\theta_{max} = \pi/2 \pm \arccos(m/\ell)$ . Оказывается, произвольная сферическая функция может быть смоделирована как результат суперпозиции наклоненных фундаментальных циркулярных мод или вырожденной прецессии одной такой наклоненной моды.

Запишем преобразование из системы угловых сферических координат  $(\theta, \phi)$  в систему собственных сферических угловых координат,  $(\vartheta, \varphi)$  связанной с фундаментальной наклоненной прецессирующей моды, описываемой углами Эйлера  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . При этом первый угол  $\alpha$  – начальный поворот вокруг оси  $z$  как раз и описывает прецессию, угол  $\beta$  – поворот вокруг новой оси  $y$  – фиксированный угол наклона фундаментальной прецессирующей моды и  $\gamma$  – третий поворот вокруг новой оси  $z$  описывает фазу фундаментальной моды.

$$\cos \vartheta = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \cos(\phi - \alpha) \sin \beta$$

$$\begin{aligned}\sin \vartheta \sin(\varphi - \gamma) &= \sin \theta \sin(\phi - \alpha) \\ \sin \vartheta \cos(\varphi - \gamma) &= \sin \theta \cos(\phi - \alpha) \cos \beta - \cos \theta \sin \beta\end{aligned}\quad (10)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}Y_{\ell\ell}(\vartheta(\alpha, \beta, \gamma), \varphi(\alpha, \beta, \gamma))/C_{\ell\ell} &= P_{\ell}^{\ell}(\cos \vartheta)e^{i\ell\varphi} = (2\ell - 1)!!(e^{i\varphi} \sin \vartheta)^{\ell} \\ &= (2\ell - 1)!!e^{i\ell\gamma}(\sin \theta \cos(\phi - \alpha) \cos \beta - \cos \theta \sin \beta + i \sin \theta \sin(\phi - \alpha))^{\ell}.\end{aligned}\quad (11)$$

Покажем, что угловую функцию с номером  $\ell$  и произвольным  $m$  можно разложить по наклоненным на фиксированный угол  $\beta$  фундаментальным модам, отличающимся лишь углом  $\alpha$ . Пока не будем обращать внимание на угол  $\gamma$  и вычислим вспомогательный интеграл:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{C_{\ell\ell}} \int_0^{2\pi} e^{im\phi} Y_{\ell\ell}(\vartheta, \varphi) d\alpha = \\ &(-1)^{\ell} (2\ell - 1)!! \int_0^{2\pi} e^{-im\psi} (\cos \theta \sin \beta - \sin \theta \cos \psi \cos \beta + i \sin \theta \sin \psi)^{\ell} d\psi\end{aligned}\quad (12)$$

Здесь сделана замена переменных  $\psi = \alpha - \phi$ . Легко проверить, что этот интеграл удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{\ell \cos \beta - m}{\sin \beta} I \quad (13)$$

И поэтому  $I = \sin^{\ell-m} \beta (1 + \cos \beta)^m F(\theta, \beta)$  и, следовательно, выражение

$$\frac{I}{\sin^{\ell-m} \beta (1 + \cos \beta)^m} \quad (14)$$

от  $\beta$  не зависит. Наконец, формально подставляя  $\beta = -\pi/2$  в (13) и сравнивая результат с известным интегралом Гейне:

$$P_{\ell}^m(\cos \theta) = \frac{(\ell + m)!}{2\pi\ell!} \int_0^{2\pi} e^{-im\psi} (\cos \theta + i \sin \theta \sin \psi)^{\ell} d\psi, \quad (15)$$

получаем

$$\begin{aligned}Y_{\ell m}(\theta, \phi) &= |\ell, m\rangle = \\ &\frac{C_{\ell m}(\ell + m)!}{C_{\ell\ell} 2\pi\ell!(2\ell - 1)!!} \frac{(-1)^{\ell-m}}{\sin^{\ell-m} \beta (1 + \cos \beta)^m} \int_0^{2\pi} e^{im\alpha} Y_{\ell\ell}(\vartheta(\alpha, \beta), \varphi(\alpha, \beta)) d\alpha = \\ &\frac{\sqrt{(\ell + m)!(\ell - m)!}}{2\pi\sqrt{(2\ell)!} \sin^{\ell-m}(\beta/2) \cos^{\ell+m}(\beta/2)} \int_0^{2\pi} e^{im\alpha} Y_{\ell\ell}(\vartheta(\alpha, \beta), \varphi(\alpha, \beta)) d\alpha\end{aligned}\quad (16)$$

Такое преобразование можно рассматривать как вариант обратного преобразования Вигнера:

$$W_{\ell m}^{\ell}(\beta) = \sqrt{\frac{(2\ell)!}{(\ell+m)!(\ell-m)!}} \sin^{\ell-m}(\beta/2) \cos^{\ell+m}(\beta/2)$$

$$|\ell, \ell, (\alpha, \beta)\rangle = \sum_{m=-\ell.. \ell} W_{\ell m}^{\ell}(\beta) e^{-im\alpha} |\ell, m\rangle \quad (17)$$

и может быть получено из него следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} |\ell, \ell, (\alpha, \beta)\rangle e^{im\alpha} d\alpha = \int \sum_{m=-\ell.. \ell} W_{\ell m'}^{\ell}(\beta) e^{-i(m'-m)\alpha'} |\ell, m'\rangle d\alpha$$

$$= 2\pi W_{\ell m}^{\ell}(\beta) |\ell, m\rangle \quad (18)$$

Следует отметить, что в вырожденном случае идеальной сферы угол наклона фундаментальных мод  $\beta$  в разложении может быть формально любым, хотя нормирующий множитель в знаменателе и имеет два резких максимума при  $\beta = \pm \arccos(m/\ell)$ . Любая сколь угодно малая эллиптичность снимает вырождение и наклоненные фундаментальные моды становятся неустойчивыми и начинают прецессировать вокруг оси возмущения, распадаясь на систему собственных функций новой системы. Абсолютная величина прецессии при этом несущественна, поскольку в пределе бесконечной добротности все резонаторы можно считать несферичными. Продолжая квантово-механическую аналогию, можно отметить, что в случае большого времени жизни атомных уровней, даже слабое внешнее поле снимает вырождение уровней из-за эффекта Штарка или Зеемана и, таким образом, дает естественную ось для определения и квантования собственных значений оператора проекции углового момента  $\hat{L}_z$ .

Можно показать, что угол наклона  $\beta$  не может быть произвольным. За один оборот волна  $e^{i\ell\varphi}$  получит фазовый сдвиг равный  $\ell\Delta\alpha \cos\beta$  ( $\varphi$  является полярным углом в новой системе координат  $(\varphi, \vartheta)$  повернутой на углы Эйлера  $\alpha, \beta$  относительно исходной  $(\phi, \theta)$  системы координат). С другой стороны, при резонансе этот фазовый сдвиг должен быть равен фазовому сдвигу в экваториальной плоскости  $\pm m\Delta\alpha$  и поэтому мы получаем условие:

$$\cos\beta = \pm \frac{m}{\ell}. \quad (19)$$

Этот простой анализ, демонстрирующий дискретизацию угла наклона  $\beta$ , дает квазигеометрическую интерпретацию природы сферических гармоник  $Y_{\ell m}$ , аналогичную квантованию проекции углового момента  $\hat{L}_z$  в квантовой механике (угловые сферические функции являются также собственными функциями оператора углового момента). Модель прецессирующей моды может показаться аналогичной векторной модели, предложенной еще Зоммерфельдом и широко используемой в квантовой теории углового момента [6], но это не так. В модели Зоммерфельда состояния  $|\ell m\rangle$  представляются

вектором  $\ell$ , длиной  $\sqrt{\ell(\ell+1)}$  прецессирующим вокруг оси  $z$ . Такая чисто классическая модель (орбитальное движение электрона) хотя и обладает наглядностью, но требует постулирования квантования величины  $z$ -проекции углового момента. В описываемом здесь подходе рассматривается прецессия квазиклассических орбит, имеющих значение  $z$ -проекции углового момента равное  $\ell\hbar$ . Этот подход существенно ближе к оптике и квазиклассическим гауссовым пучкам. Разница особенно очевидна для самой фундаментальной моды, которая в векторной модели сама описывается прецессирующим под углом  $\arccos(\ell/\sqrt{\ell(\ell+1)})$  вектором  $\ell$ . Модель прецессии фундаментальной моды легко получается в квазиклассическом методе эйконала, однако, оказывается, она следует и из точного разложения сферических функций.

Рассмотрим, к чему приводит малая сплюснутость (вытянутость) вдоль оси  $z$ . Если эллиптичность сфероида мала (угловой сдвиг на один оборот  $\Delta\alpha \ll 2\pi/m$ , то разложение для скалярной сферической функции, зависящей от времени с учетом прецессии можно записать в виде:

$$e^{-i\omega_{\ell\ell}t} \int_0^{2\pi} e^{im\alpha} Y_{\ell\ell}(\vartheta(\alpha + \Omega t, \beta), \varphi(\alpha + \Omega t, \beta)) d\alpha, \quad (20)$$

где  $\Omega = \Delta\alpha\omega/2\pi\ell$  – круговая фазовая скорость прецессии и  $\omega_{\ell\ell}$  означает невозмущенную собственную частоту фундаментально циркулярной моды. Заменой переменных мы сразу получаем выражение для частотного расщепления

$$e^{-i(\omega_{\ell\ell}+m\Omega)t} \int_0^{2\pi} e^{im\alpha} Y_{\ell\ell}(\vartheta(\alpha, \beta), \varphi(\alpha, \beta)) d\alpha \propto e^{-i(\omega_{\ell\ell}+m\Omega)t} Y_{\ell m}. \quad (21)$$

Оценку частотного расщепления мод сфероида проще всего сделать в геометрическом приближении. При этом подходе требуется всего лишь вычислить периметр наклоненного эллипса. Если эксцентриситет сфероида равен  $\varepsilon$ , то наклоненный под углом  $\beta = \arccos(m/\sqrt{\ell(\ell+1)})$  эллипс в сплюснутом сфероиде будет иметь ту же большую полуось  $a$  и эксцентриситет

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{\varepsilon^2(1 - \cos^2 \beta)}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \beta}}$$

Периметр эллипса, как известно, не имеет аналитического выражения, но с точностью до второго по  $\varepsilon'$  порядка (даже для больших значений эксцентриситета  $\varepsilon \sim 1$ , при  $\ell - m \ll \ell$ ,  $\varepsilon' - \text{мало}$ ) может быть записана в виде:

$$L' = 2\pi a \left( 1 - \frac{\varepsilon'^2}{4} \right), \quad (22)$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta\omega_o}{\omega} \simeq \frac{2\pi a - L'}{2\pi a} = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \beta}{4(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \beta)} \quad (23)$$

Аналогичным образом, в вытянутом эллипсоиде ( $a' = a/\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta}$ ,  $\varepsilon' = \varepsilon \sin \beta$ )

$$\frac{\Delta\omega_p}{\omega} \simeq \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \beta}{4} \quad (24)$$

Расчет методом теории возмущений в первом приближении, сделанный в работе [7] (принцип изложен в Лекции 2) приводит к результату:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{\omega} &\simeq \frac{\varepsilon(\ell^2 - m^2)}{2\ell(\ell + 1)} \\ \varepsilon &= \frac{b - a}{(ba^2)^{1/3}} \simeq -\frac{\varepsilon^2}{2} \end{aligned} \quad (25)$$

Хотя это выражение с точностью до  $\varepsilon^2$  и совпадает с предыдущими выражениями, но точность обоих приближения недостаточна для оценки расщепления в перспективных резонаторах с большим эксцентриситетом, которые должны обладать прореженным спектром. Общее рассмотрение сфероидальных резонаторов с более точными приближениями будет проведено далее.

### 3 Радиальные функции, аналогия с квантовой механикой и ВКБ

Радиальная часть уравнения для скалярного потенциала Дебая  $\psi_r$  имеет вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi_r}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_r + k_0^2 n(r)^2 \psi_r = 0 \quad (26)$$

Радиальная часть уравнения Шредингера после отделения угловой части выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi_r}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Psi_r + \frac{2M}{\hbar^2} [E - V(r)] \Psi_r = 0 \quad (27)$$

Если переписать последнее слагаемое в первом из уравнений в виде  $k_0^2 n^2(r) = k_0^2 + k_0^2 [n^2(r) - 1]$ , появляется полная аналогия [8]. При этом  $\hbar k_0$  – импульс фотона,  $E = \hbar\omega$  – его энергия,  $M = \frac{\hbar\omega}{c^2}$ ,

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{2M} k_0^2 (1 - n^2(r)), \quad (28)$$

а эффективный потенциал, учитывающий центробежный потенциал

$$V^*(r) = \frac{\hbar^2}{2M} \left[ k_0^2 - k_0^2 n^2(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] = \frac{\hbar^2}{2M} [k_0^2 - k^{*2}]. \quad (29)$$



(в квантовой механике используется локальный импульс. Здесь введено обозначение  $k^*$ , которое соответствует локальному импульсу  $p = \hbar k^*$  в квантовой механике:

$$k^{*2}(r) = k_0^2 n^2(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} = k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (30)$$

Величина  $\frac{\hbar^2}{2M} k^{*2}(r)$  аналогична кинетической энергии. Если эта величина положительна, то фотон может свободно распространяться, если же она отрицательна, то мы находимся в классически-запрещенной зоне, в которой локальное волновое число  $k^*$  чисто мнимое и поле экспоненциально затухает.

Заменой  $\psi_r = \tilde{\Psi}(r)/r$  можно избавиться в уравнении от первой производной (в сферических координатах такая замена означает переход от функций Бесселя к функциям Риккати-Бесселя), уравнение сводится к простейшему одномерному уравнению Шредингера для движения частицы при наличии потенциала:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 \tilde{\Psi}(r)}{dr^2} + V^*(r) \tilde{\Psi}(r) = E \tilde{\Psi}(r), \quad (31)$$

То же самое уравнение получается и для радиальной функции в цилиндрических координатах заменой  $\Psi(\rho) = \tilde{\Psi}(\rho)/\sqrt{\rho}$ . При этом в центробежный потенциал в знаменатель вместо  $\ell(\ell+1)$  входит выражение  $m^2 - 1/4$ .

Построим график  $V^*(r)$  для сферического резонатора, в котором  $n(r) = n$  при  $r < a$  и  $n(r) = 1$  при  $r > a$  в единицах  $\frac{\hbar^2}{2M}$ .

Как видно из рисунка, потенциал имеет вид классической потенциальной ямы с четырьмя областями. Границы областей находятся из решения уравнений  $k^{*2}(r) = 0$ :

$$\begin{aligned} k_0 n r_{min} &= \sqrt{l(l+1)} \\ k_0 r_{max} &= \sqrt{l(l+1)} \end{aligned} \quad (32)$$

В областях I ( $r < r_{min}$ ) и III ( $a < r < r_{max}$ ) поле экспоненциально затухает. В области потенциальной ямы II ( $r_{min} < r < a$ ) фотон распространяется между поверхностью резонатора и границей центробежного потенциала, которая является каустикой. Наконец, в области IV ( $r > r_{max}$ ) фотон распространяется как убегаящая волна, протуннелировавшая через потенциальный барьер области III.

Если длина волны много меньше чем характерный масштаб изменения потенциала, (за исключением областей разрыва):

$$k_0 \gg \frac{1}{V^*} \frac{dV^*}{dr}, \quad (33)$$

то можно решение уравнения выписать, согласно методу ВКБ в виде:

$$\tilde{\Psi}(r) = e^{\pm i \int k^* dx} \quad (34)$$

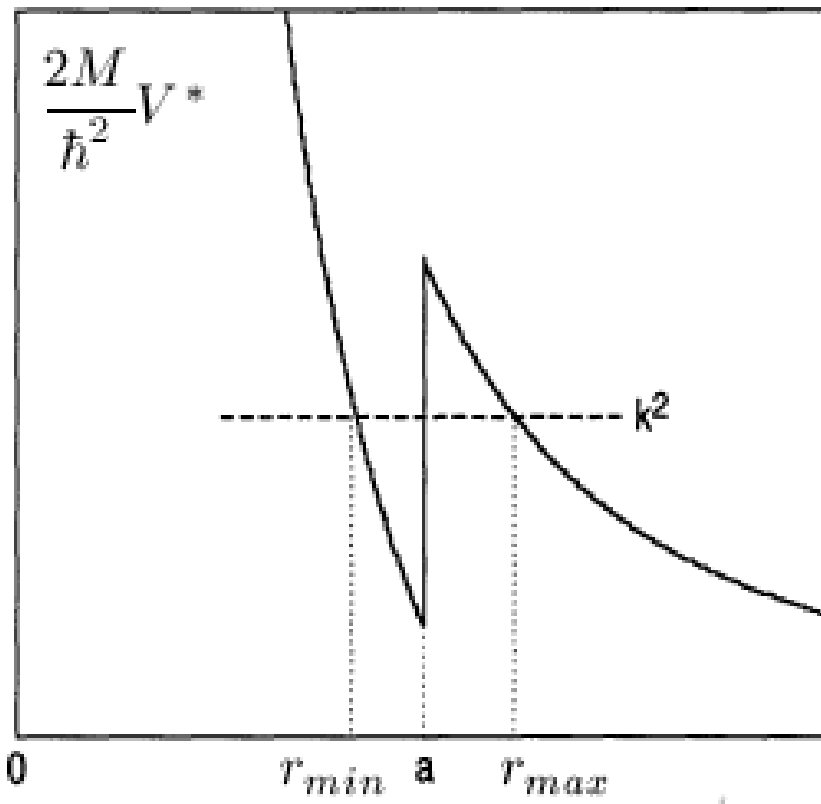


Рис. 2: Эффективный потенциал в сферическом диэлектрическом микрорезонаторе

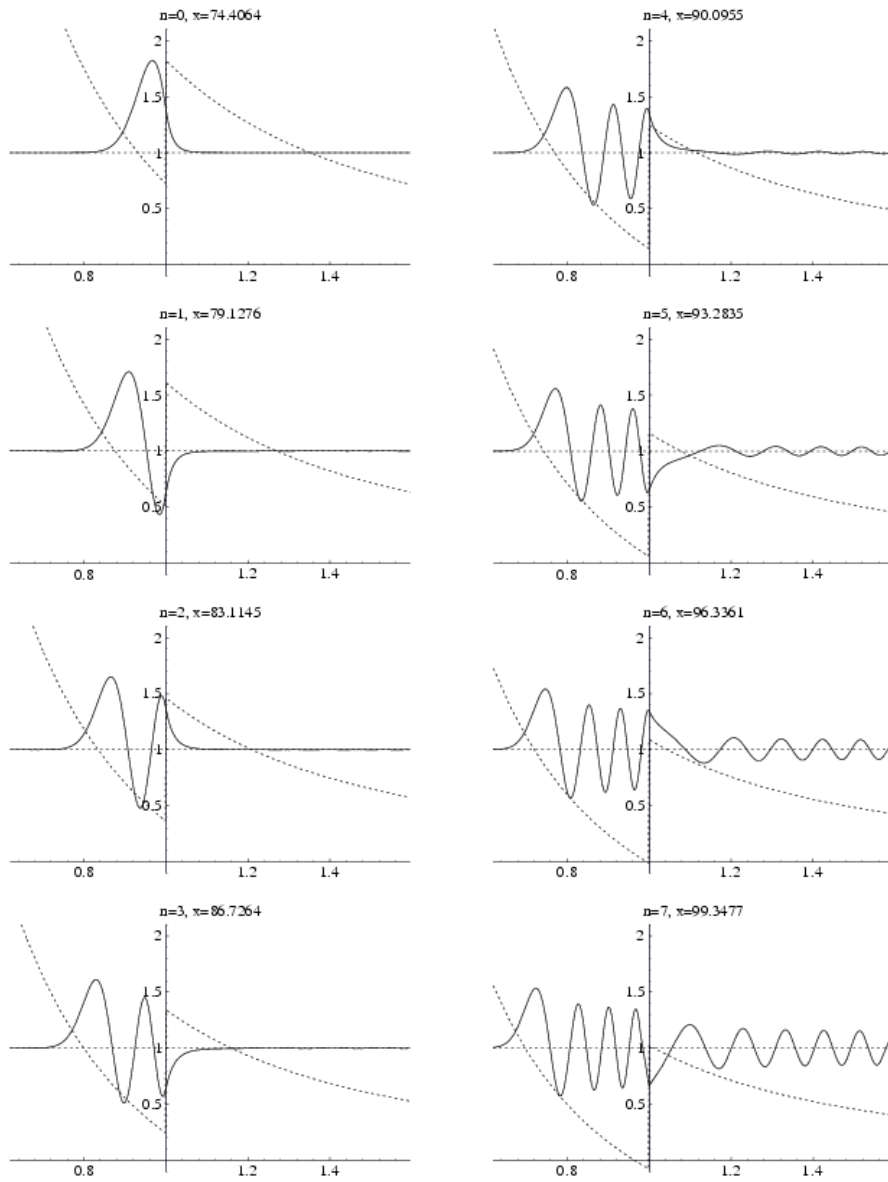


Рис. 3: Поведение фотона в эффективном потенциале диэлектрического резонатора

Граничные условия на гладких границах и непрерывность функции  $\tilde{\psi}$  при переходе других границ областей позволяют шить решения в разных областях, а применение условий квантования Бора-Зоммерфельда позволяет определить собственные частоты.

**Задание 6.2** Найдите приближение для функций Риккати-Бесселя первого и второго рода в ВКБ приближении, постройте графики и сравните с самими функциями.

## 4 Метод ВКБ для нахождения собственных значений в произвольных телах вращения

Для нахождения собственных частот аксиально симметричных резонаторов в работе [9] был предложен метод, основанный на квазиклассическом квантовании поперечного волнового числа  $\beta$ . Аналогичный метод рассмотрен в работе [1]. В адиабатическом приближении, когда граница резонатора  $\rho_w(z)$  медленно по сравнению с длиной волны меняется вдоль по оси  $z$  и  $\beta \ll k_0$ , распределение поля можно приблизительно представить в виде:

$$\Psi \propto e^{\pm i \int \beta(z) dz \pm im\phi} R(\rho), \quad (35)$$

где  $\beta(z) = \sqrt{k^2 - y_{mq}^2/\rho_w^2(z)}$ ,  $y_{mq}$  – собственные решения характеристического уравнения для бесконечного цилиндра (см. Лекцию 4), а  $R(\rho/\rho_w(z))$ , радиальные решения, выражающиеся через функции Бесселя  $J(y_{mp}\rho/\rho_w)$  внутри и функции Ханкеля  $H^{(2)}(x_{mp}\rho/\rho_w)$  снаружи.

Тогда в соответствии с условием квантования Бора-Зоммерфельда:

$$\frac{1}{2\pi} \oint \beta(z) dz = 2 \int_{z_1}^{z_2} \left[ k_{mpq}^2 - \frac{y_{mq}^2}{\rho_w^2(z)} \right]^{1/2} dz = 2\pi(p + \frac{1}{2}) \quad (36)$$

Здесь  $z_1$  и  $z_2$  точки поворота, когда выражение под корнем обращается в ноль.

Рассмотрим, как этот метод работает для идеальной сферы в случае простейших нулевых граничных условий (вытекающего поля снаружи нет). В этом случае точное решение известно –  $k_{mpq}a = y_{\nu q} = t_{m+1/2q}$ , а  $y_{mq} = t_{mq}$ ,  $\rho_w(z) = a^2 - z^2$ ,  $z_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - y_{mq}^2/k_{mpq}^2}$ . Делая замену переменных  $\sin \psi = z/z_1$  и раскладывая интеграл в ряд по малому параметру  $\gamma^2 = (y_{\nu q}^2 - y_{mq}^2)/y_{mq}^2$ , получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-z_1}^{z_1} \left[ k_{mpq}^2 - \frac{y_{mq}^2}{a^2 - z^2} \right]^{1/2} dz &= \gamma y_{mq} \sqrt{1 + \gamma^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \psi}{\sqrt{1 + \gamma \cos^2 \psi}} d\psi \\ &\simeq \frac{\pi}{2} \left[ \gamma + \frac{\gamma^3}{8} - \frac{5\gamma^5}{64} + \frac{57\gamma^7}{1024} + \dots \right]. \quad (37) \end{aligned}$$

Оборачивая ряд, из условия квантования Бора-Зоммерфельда находим уравнение для искомого  $y_{\nu m q} = k_{m p q} a$ , используя разложение для корней функций Бесселя [10]:

$$y_{m q} = t_{m q} = m - \alpha_q \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{3}{20} \alpha_q^2 \left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} + \frac{\alpha_q^3 + 10}{1400} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1} - \frac{479 \alpha_q^4 - 40 \alpha_q}{504000} \alpha_q^4 \left(\frac{m}{2}\right)^{-5/3} \quad (38)$$

можно получить:

$$y_{\nu, q} = \nu - \alpha_q \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/3} + \frac{3}{20} \alpha_q^2 \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1/3} + \frac{\alpha_q(2p+1)}{12} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-2/3} + \left[ \frac{\alpha_q^3 + 10}{1400} + \frac{(2p+1)^2}{32} \right] \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1}$$

Сравнивая это выражение с истинным рядом для  $t_{\nu q}$ , получающегося из (38) формальной заменой  $m \rightarrow \nu = m + 1/2$ , видим отличие в четвертом члене и приходим к выводу, что метод Сумецкого дает относительную точность собственных частот порядка  $O(\nu^{-5/3})$ .

Применяя этот метод к сфероиду с полуосями  $a$  и  $b$ , получим асимптотику:

$$ka = \nu - \alpha_q \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/3} + \frac{(2p+1)(a-b)}{2b} + \frac{3}{20} \alpha_q^2 \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1/3} + O(\nu^{-2/3}),$$

повидимому, верную также только до четвертого члена разложения.

## 5 Геометрическое приближение волновой оптики. Уравнения эйконала.

Аналогом квазиклассического приложения в волновой оптике является приближение геометрической оптики, которое математически выражается в методе эйконала.

Математические основания лучевой интерпретации волновых уравнений оптики были заложены Гамильтоном [11] и Дебаем [12] и получили дальнейшее развитие уже в наше время [13, 14, 4, 15]. Такое асимптотическое приближение позволяет не только весьма просто описывать распространение излучения в неоднородных средах, но и решать различные граничные задачи, включая дифракционное рассеяние [16] и расчет собственных значений и полей в резонаторах [17, 18], что представляет особенный интерес для анализа микрорезонаторов.

Лучевой приближение обычно рассматривается как асимптотическое решение скалярного волнового уравнения Гельмгольца, к которому, как было показано выше, непосредственно сводится векторное уравнение в важнейших координатных системах (декартова, цилиндрическая, сферическая).

Асимптотическое решение волнового уравнения в приближении медленного в масштабе длины волны изменения показателя преломления и граничных условий можно искать в виде плоских волн с медленно меняющимися в пространстве амплитудами и фазами. Удобно, как предложил Дебай [12], воспользоваться разложением поля по обратным степеням волнового числа  $k_0$  [15]:

$$\Psi(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r})}{(ik_0)^m} e^{ik_0 S(\mathbf{r})}. \quad (39)$$

После подстановки этого ряда в уравнение Гельмгольца и приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях  $k_0$  получается бесконечная система связанных уравнений:

$$(\nabla S)^2 = n^2 \quad (40)$$

$$2(\nabla A_0 \nabla S) + A_0 \Delta S = 0 \quad (41)$$

$$2(\nabla A_m \nabla S) + A_m \Delta S = -\Delta A_{m-1} \quad (42)$$

Функцию  $S(\mathbf{r})$  принято вслед за Х.Брунсом называть эйконалом (от греческого  $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$  – изображение), а первое из уравнений системы, описывающее эту функцию, – уравнением эйконала. Эйконал  $S$  имеет размерность длины и имеет смысл оптического пути. Уравнения для амплитудных коэффициентов  $A_m$  называют уравнениями переноса нулевого, первого и т.д. порядков. Полученная система проще исходного уравнения Гельмгольца, поскольку состоит из уравнений в частных производных первого порядка, которые с помощью метода характеристик сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям [15].

Формально полученная система уравнений позволяет получить решение уравнения Гельмгольца с любой точностью, хотя сходимость решения в общем виде пока не доказана. Однако часто ограничиваются лишь рассмотрением уравнения эйконала и уравнения переноса нулевого порядка. Для целей анализа мод шепчущей галереи этого приближения также вполне достаточно.

В системах координат, в которых векторное волновое уравнение не сводится к скалярному, приближение эйконала, тем не менее, для мод типа шепчущей галереи работает достаточно хорошо для тех компонент электрического или магнитного поля, которые являются доминирующими для данного типа колебаний, и в основном определяют собственные частоты резонатора. Так, для колебаний, близких к ТЕ-типу – это меридиональная электрическая и нормальная к поверхности магнитная компонента, и наоборот для колебаний, близких к ТМ. Можно, однако, действуя более последовательно, ввести разложения Дебая непосредственно для электрического и магнитного полей [13]:

$$\mathbf{E}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}_m(\mathbf{r})}{(ik_0)^m} e^{ik_0 S(\mathbf{r})}$$

$$\mathbf{H}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_m(\mathbf{r})}{(ik_0)^m} e^{ik_0 S(\mathbf{r})}. \quad (43)$$

После подстановки этих рядов в уравнения Максвелла получаем [13, 15]:

$$\begin{aligned} (\nabla S)^2 &= \epsilon & (44) \\ \nabla S \times \mathbf{H}_0 + \epsilon \mathbf{E}_0 &= 0 \\ \nabla S \times \mathbf{H}_m + \epsilon \mathbf{E}_m &= -\nabla \times \mathbf{H}_{m-1} \\ \nabla S \times \mathbf{E}_0 - \mathbf{H}_0 &= 0 \\ \nabla S \times \mathbf{E}_m - \mathbf{H}_m &= -\nabla \times \mathbf{E}_{m-1} & (45) \end{aligned}$$

Легко видеть, что уравнения для эйконала  $S$  в векторном и скалярном случаях совпадают.

## Список литературы

- [1] X. S. Y. V. S. Ilchenko, M. L. Gorodetsky and L. Maleki, *Opt. Lett.* **26**, 256 (2001).
- [2] S. M. S. D. K. Armani, T. J. Kippenberg and K. J. Vahala, *Nature* **421**, 925 (2003).
- [3] V.S. Ilchenko, A.A. Savchenkov, A.B. Matsko, and L. Maleki, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 043903 (2004).
- [4] В.М. Бабич, В.С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, М.: Наука, 1972.
- [5] Г. Вальтер, *УФН* **36**, 777 (1996).
- [6] . Зар, *Теория углового момента*, М., Мир, 1993.
- [7] H.M. Lai, P.T. Leung, K. Young, P.W. Barber, and S.C. Hill, *Phys. Rev. A* **41**, 5187 (1990).
- [8] B. R. Johnson, *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 343 (1993).
- [9] M. Sumetsky, *Opt. Lett.* **29**, 8 (2004).
- [10] М. Абрамовиц и И. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, Москва, 1979.
- [11] W. R. Hamilton, *Mathematical papers*, Cambridge Univ. Press, 2 vols., 1933, 1940.
- [12] P. Debye, *Ann. Phys.* **35**, 277 (1911).
- [13] С.М.Рытов, *ДАН СССР* **18**, 263 (1938).

- [14] R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*, Berkley: Univ. of California Press, 1964.
- [15] Ю.А. Кравцов, Ю.И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред*, М.: Наука, 1980.
- [16] B. S. J.B. Keller, R.M. Lewis, *Comm. Pure Appl. Math.* **9**, 207 (1956).
- [17] J.B. Keller, S.I. Rubinow, *Ann. Phys.* **9**, 24 (1960).
- [18] В.П. Быков, *Электроника больших мощностей* **4**, 66 (1965).