

Спецкурс “Оптические микрорезонаторы”.
Лекция 4. Моды шнпгчей галереи в
цилиндрических координатах

М.Л.Городецкий

13 марта 2009 г.

Мы переходим к рассмотрению диэлектрических микрорезонаторов с модами типа шепчущей галереи. Такие резонаторы являются телами вращения – сферами, дисками, тороидами, сфероидами и т.д. Высокодобротные диэлектрические резонаторы в форме колец и дисков с МШГ стали применяться в СВЧ диапазоне с начала 60-ых годов, и получили широкое распространение в различных устройствах [?]. При гелиевых температурах добротность таких резонаторов из лейкосапфира (кристаллический сверхчистый оксид алюминия Al_2O_3) для миллиметрового диапазона волн может превышать 10^9 [1]. Перенос успешной формы в область световых волн казался естественным и вполне реализуемым методами интегральной оптики и такие предложения появились достаточно рано [2]. Однако в оптическом диапазоне здесь пришлось столкнуться с резким ростом влияния поверхностных неоднородностей и как следствие с малой добротностью получающихся устройств. И лишь относительно недавно развитие технологии и появление чистых материалов позволило получить действительно высокие добротности в дисковых и кольцевых оптических резонаторах [3, ?, ?].

0.1 Волны в цилиндрических координатах

Определение основных операторов в цилиндрической системе координат (ρ, z, ϕ) , связанными с параметрами Ламэ $h_\rho = h_z = 1$, $h_\phi = \rho$, показаны на врезке.

Векторные операторы в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned}
\nabla u &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{i}_z, \\
\nabla \cdot \mathbf{U} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho U_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \\
\nabla \times \mathbf{U} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_z}{\partial \phi} - \frac{\partial U_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{i}_\rho + \left(\frac{\partial U_\rho}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{i}_\phi \\
&\quad + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho U_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial U_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{i}_z, \\
\nabla^2 u &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} &= - \left[\frac{\partial^2 U_\rho}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U_\rho}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 U_z}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2(\rho U_\phi)}{\partial \phi \partial \rho} \right] \mathbf{i}_\rho \\
&\quad - \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho U_\phi)}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\rho}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z \partial \phi} \right] \mathbf{i}_\phi \\
&\quad - \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_\rho}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial z \partial \phi} \right] \mathbf{i}_z, \\
\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) &= \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho U_\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 U_z}{\partial \rho \partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} \right) \right] \mathbf{i}_\rho + \\
&\quad \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2(\rho U_\rho)}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z \partial \phi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial \phi^2} \right] \mathbf{i}_\phi + \\
&\quad \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2(\rho U_\rho)}{\partial \rho \partial z} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial \phi \partial z} \right] \mathbf{i}_z, \\
\nabla^2 \mathbf{U} &= \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 U_\rho}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U_\rho}{\partial \phi^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} - \frac{1}{\rho^2} U_\rho \right] \mathbf{i}_\rho \\
&\quad + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_\phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial U_\rho}{\partial \phi} - \frac{1}{\rho^2} U_\phi \right] \mathbf{i}_\phi \\
&\quad + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_z}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \phi^2} \right] \mathbf{i}_z.
\end{aligned} \tag{1}$$

Воспользовавшись выражением для векторного оператора Лапласа, выпишем волновое уравнение для векторов \mathbf{E} в изотропной среде, которое сводится к системе из трех частично связанных уравнений:

$$\begin{aligned}\nabla^2 E_\rho + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) E_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} &= 0, \\ \nabla^2 E_\phi + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) E_\phi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} &= 0, \\ \nabla^2 E_z + k^2 E_z &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Аналогичная система уравнений получается для компонент магнитного поля H .

Если ввести новые переменные [4]:

$$E_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_\rho \pm iE_\phi),\tag{3}$$

то система “разделяется” на три независимых уравнения:

$$\begin{aligned}\nabla^2 E_\pm + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) E_\pm \pm \frac{2i}{\rho^2} \frac{\partial E_\pm}{\partial \phi} &= 0, \\ \nabla^2 E_z + k^2 E_z &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Такая система уравнений интересна тем, что хотя поле раскладывается по цилиндрическим компонентам, решать уравнение для каждой компоненты можно в произвольной аксиально-симметричной системе ξ, η, ϕ (сферической, сфероидальной, параболической, тороидальной и т.д.), удобной для соответствующей геометрии задачи. Аналогичным образом в любой системе координат возможно разделение векторного уравнения Гельмгольца по декартовым компонентам. При этом каждая декартова компонента должна удовлетворять скалярному уравнению в этой, в общем случае недекартовой, системе координат.

При выбранной угловой зависимости в виде $e^{im\phi}$, где m – целое число, полученные три уравнения сводятся к трем уравнениям одного вида:

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi\eta}^2 E_\pm + \left[k^2 - \frac{(m \pm 1)^2}{\rho^2(\xi, \eta)}\right] E_\pm &= 0, \\ \nabla_{\xi\eta}^2 E_z + \left[k^2 - \frac{m^2}{\rho^2(\xi, \eta)}\right] E_z &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Справедливость полученных уравнений следует из того, что в любой аксиальной системе координат возможна замена

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \nabla_{\xi\eta}^2 + \frac{1}{h_\phi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \\ h_\phi &= \rho(\xi, \eta).\end{aligned}\tag{6}$$

Если известно общее решение скалярного уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi + k^2 \psi &= 0, \\ \psi_{lm}(\xi, \eta, \phi) &= \psi_{lm}(\xi, \eta) e^{im\phi},\end{aligned}\quad (7)$$

Решение уравнений (5) может быть сразу выписано в виде ряда:

$$\begin{aligned}E_z &= e^{im\phi} \sum_l a_l^{(z)} \psi_{lm}(\xi, \eta), \\ E_\phi &= e^{im\phi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l \left[a_l^{(+)} \psi_{lm+1} + a_l^{(-)} \psi_{lm-1} \right], \\ E_\rho &= -e^{im\phi} \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_l \left[a_l^{(+)} \psi_{lm+1} - a_l^{(-)} \psi_{lm-1} \right].\end{aligned}\quad (8)$$

Связь коэффициентов $a_l^{(\pm)}$, $a_l^{(z)}$ определяется из условия $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, и решение задачи сводится к удовлетворению системы уравнений (8) граничным условиям.

О том, что этот подход заслуживает внимания, свидетельствует хотя бы то, что таким образом можно достаточно просто получить полное решение векторного уравнения Гельмгольца без использования специальных потенциалов не только в цилиндрических, но и в сферических координатах. При этом в суммах (8) достаточно взять только одно слагаемое.

Вернемся к системе уравнений (2). В изотропной среде поле E является соленоидальным (его дивергенция равна нулю). При выбранной угловой зависимости решения от угла ϕ в виде $e^{im\phi}$ получаем:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{im}{\rho} E_\phi + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, компонента поля E_ϕ и ее производные явным образом выражаются через две другие компоненты

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} &= -\rho \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho}, \\ E_\phi &= -\frac{\rho}{im} \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{1}{im} \frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho},\end{aligned}\quad (10)$$

и, следовательно, система трех уравнений (2) после исключения компоненты E_ϕ принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} + \left[\epsilon k_0^2 - \frac{m^2 - 1}{\rho^2} \right] E_\rho + \frac{2}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \left[\epsilon k_0^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right] E_z &= 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Аналогичным уравнениям удовлетворяют компоненты магнитного поля. Таким образом нам удалось свести трехмерную задачу к двумерной только для двух компонент поля. Эта более простая новая система уравнений

удобна для численного решения уравнений, например, методом конечных элементов в системе Comsol Multiphysics и вследствие уменьшения размерности позволяет добиться лучшей точности решения.

Дисковые оптические микрорезонаторы могут изготавливаться из кристаллических материалов [5, 6, 7]. Полезно поэтому вывести уравнения и для анизотропного одноосного кристалла.

Уравнение колебаний в этом случае запишется в виде:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

В анизотропной одноосной осесимметричной среде ($\partial \hat{\epsilon} / \partial \phi = 0$), в которой

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \\ \hat{\epsilon} &= \begin{pmatrix} \epsilon_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_\rho & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{13}$$

получается при выбранном номере m следующая система из двух уравнений удобная для численных решений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\epsilon_z}{\epsilon_\rho} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \left(k_0^2 \epsilon_z - \frac{m^2}{\rho^2} \right) E_z &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} + \frac{\epsilon_z - \epsilon_\rho}{\epsilon_\rho} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial z} + \frac{\epsilon_z}{\epsilon_\rho} \frac{2}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ + \left(\epsilon_\rho k_0^2 - \frac{m^2 - 1}{\rho^2} \right) E_\rho &= 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Вообще говоря, векторное уравнение в произвольной аксиальной системе координат всегда можно свести к системе двух скалярных уравнений относительно E_ϕ и H_ϕ – связанных азимутальных потенциалов (CAP - Coupled Azimuthal Potentials) [8], либо, соответственно, к одному уравнению для компоненты введенного ранее комплексного вектора Римана-Зильберштейна F_ϕ . Однако получающиеся уравнения весьма неудобны для решения:

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi h_\phi}{h_\eta} \frac{\partial (h_\phi F_\phi)}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta h_\phi}{h_\xi} \frac{\partial (h_\phi F_\phi)}{\partial \xi} \right) + h_\xi h_\eta (k^2 h_\phi^2 - m^2) F_\phi \\ & - \frac{k}{k^2 h_\phi^2 - m^2} \frac{\partial (h_\phi F_\phi)}{\partial \xi} \left(\frac{\partial h_\phi^2}{\partial \xi} \frac{k h_\eta h_\phi}{h_\xi} + im \frac{\partial h_\phi^2}{\partial \eta} \right) \\ & - \frac{k}{k^2 h_\phi^2 - m^2} \frac{\partial (h_\phi F_\phi)}{\partial \eta} \left(\frac{\partial h_\phi^2}{\partial \eta} \frac{k h_\xi h_\phi}{h_\eta} - im \frac{\partial h_\phi^2}{\partial \xi} \right) = 0\end{aligned}\tag{15}$$

0.2 Скалярное уравнение Гельмгольца

В основе многих методов решения векторного уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах лежит скалярное уравнение Гельмгольца, которому удовлетворяет, в частности компонента E_z и другие вводимые для удобства скалярные потенциалы. Решение скалярного уравнения

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (16)$$

легко находится разделением переменных $\psi(\rho, \phi, z) = Z(\rho)\Phi(\phi)\zeta(z)$.

$$\frac{1}{Z(\rho)\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial Z(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\zeta(z)} \frac{\partial^2 \zeta(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{\Phi(\phi)\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + k^2 = 0 \quad (17)$$

Последовательно вводя независимые от координат константы разделения β и m и отщепляя слагаемые, получаем:

$$\frac{\partial^2 \zeta(z)}{\partial z^2} + \beta^2 \zeta(z) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \left(k^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) Z(\rho) = 0 \quad (20)$$

Общим решением первого уравнения являются функции вида

$$\zeta(\beta) = C_z^+ e^{i\beta z} + C_z^- e^{-i\beta z}, \quad (21)$$

определяющие волны, бегущие в положительном и отрицательном направлении z . Константы C_z^\pm определяются из каких-то дополнительных условий. Константа β является постоянной распространения вдоль оси z и, вообще говоря, может быть как действительной, так и комплексной. При действительных β общее решение можно записать также в виде стоячих четных и нечетных по z волн:

$$\zeta(\beta) = C_z^e \cos \beta z + C_z^o \sin \beta z, \quad (22)$$

Общее решение для угловых функций имеет тот же вид, что и в случае зависимости по z .

$$\Phi(\beta) = C_\phi^+ e^{im\phi} + C_\phi^- e^{-im\phi} \quad (23)$$

или

$$\Phi(\beta) = C_\phi^e \cos(m\phi) + C_\phi^o \sin m\phi, \quad (24)$$

однако условие замыкания по угловой циклической координате $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ приводит к тому, что константа m должна быть целой. Во всех

телах вращения частоты мод вырождены по четности или направлению относительно угла ϕ . То есть моды, бегущие в противоположных направлениях вокруг оси, а также четные и нечетные стоячие волны, распределенные по косинусу и синусу при одном и том же индексе m имеют одинаковые частоты и основные свойства. Поэтому там, где характер распределения по ϕ не принципиален будем для простоты писать зависимость в виде $e^{im\phi}$.

Заменой $x = \sqrt{(k^2 - \beta^2)}\rho$, радиальное уравнение сводится к уравнению Бесселя.

Итак, частное решение скалярного уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах.

имеет вид:

$$\psi = Z_m(\sqrt{k^2 - \beta^2}\rho)e^{im\phi + i\beta z}, \quad (25)$$

0.3 Функции Бесселя

Функция $Z_m(x)$ – удовлетворяет уравнению:

$$Z_m'' + \frac{1}{x}Z_m' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)Z_m = 0. \quad (26)$$

Штрихом после функций здесь и далее мы обозначаем производную по ее полному аргументу, в данном случае по x .

Хотя это уравнение и функции носят имя Фридриха Вильгельма Бесселя, но, как утверждает Большая Советская Энциклопедия, введены они были в 1766 году, почти на 50 лет раньше работ Бесселя Леонардом Эйлером при изучении колебаний мембраны в 1766 году, функция нулевого порядка встречается ещё раньше, в 1738 году, в работе Даниила Бернулли, посвященной колебанию тяжёлой цепи, а функция порядка $1/3$ с которой связаны также используемые далее функции Эйри описана в письме 1703 года Якоба Бернулли к Готфриду Лейбницу.

Иногда, например в задачах аппроксимации удобна запись, не содержащая первой производной:

$$(x^{1/2}Z_m)'' + \left(1 - \frac{m^2 - 1/4}{x^2}\right)(x^{1/2}Z_m) = 0. \quad (27)$$

Общим решением этого уравнения является линейная комбинация двух цилиндрических функций, каждая из которых, естественно, также подчиняется уравнению (26):

$$Z_m(x) = C_J J_m(x) + C_Y Y_m(x). \quad (28)$$

Здесь J_m – цилиндрическая функция Бесселя, конечная в нуле ($J_0(0) = 1$, $J_{m \neq 0}(0) = 0$), $Y_m(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя второго рода или

функция Неймана (другое встречающееся обозначение $N_m(x)$), которая при приближении к нулю по стремится к $-\infty$. При больших значениях m

$$\begin{aligned} J_m(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{ex}{2m}\right)^m, \\ Y_m(x) &\sim -\frac{2}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{ex}{2m}\right)^{-m}. \end{aligned} \quad (29)$$

Вдали от нуля это осциллирующие, хотя и не точно периодические ограниченные функции, во многом похожие на косинус и синус. Такая аналогия с базовыми тригонометрическими функциями становится понятной, поскольку уравнение для них $Z'' + Z = 0$ формально получается из (26), при $x \rightarrow \infty$. Выбор констант $C_{J,Y}$ при функциях Бесселя и Неймана производится исходя из граничных условий и требуемого поведения в нуле и на бесконечности. Так, если рассматриваемая область пространства включает окрестность нуля, $C_Y = 0$. Для описания бегущих волн на бесконечности аналогично гармоническим функциями естественно для решения использовать другую линейную комбинацию и ввести новую пару функций:

$$Z_m(x) = C_{H1}H_m^{(1)}(x) + C_{H2}H_m^{(2)}(x) \quad (30)$$

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iY_m(x)$$

$$H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iY_m(x) \quad (31)$$

Функции $H_m^{(1,2)}$ называются функциями Ханкеля первого и второго рода. Такой переход аналогичен переходу к комплексным экспонентам $e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$. На бесконечности при $x \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические выражения [9, 10]:

$$\begin{aligned} J_m(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ Y_m(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ H_m^{(1)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - m\pi/2 - \pi/4)}, \\ H_m^{(2)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - m\pi/2 - \pi/4)} \end{aligned} \quad (32)$$

Для больших значений аргумента и номера можно пользоваться квазиклассическими аппроксимациями Дебая, смысл которых будет прояснен в дальнейшем. Эти аппроксимации тесно связаны с приближениями геометрической оптики. При $x < m$:

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(s - m \operatorname{arctanh} \frac{s}{m}\right) [1 + O(m^{-1})], \\ Y_m(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi s}} \exp\left(-s + m \operatorname{arctanh} \frac{s}{m}\right) [1 + O(m^{-1})], \\ s &= \sqrt{m^2 - x^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

При $x > m$:

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos\left(s - m \arctan \frac{s}{m} - \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(m^{-1})], \\ Y_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \sin\left(s - m \arctan \frac{s}{m} - \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(m^{-1})], \\ s &= \sqrt{x^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Последние приближения переходят в (32) при $x \rightarrow \infty$.

Первый нуль функций Бесселя и Неймана с большим номером появляется при значениях аргумента близких к m (см приведенные на рисунках графики функций разного порядка). В этой области хорошо работают приближения, использующие функции Эйри, получающиеся линеаризацией множителя в скобках в (26) вблизи $x = m$, когда это выражение обращается в нуль:

$$\begin{aligned} J_m(m + \xi m^{1/3}) &= 2^{1/3} m^{-1/3} \text{Ai}(-2^{1/3} \xi) + O(m^{-1}), \\ Y_m(m + \xi m^{1/3}) &= -2^{1/3} m^{-1/3} \text{Bi}(-2^{1/3} \xi) + O(m^{-1}). \end{aligned} \quad (35)$$

Пара независимых функций Эйри Ai и Bi является решением уравнения

$$f''(x) - xf(x) = 0. \quad (36)$$

Отсюда решения более общего уравнения

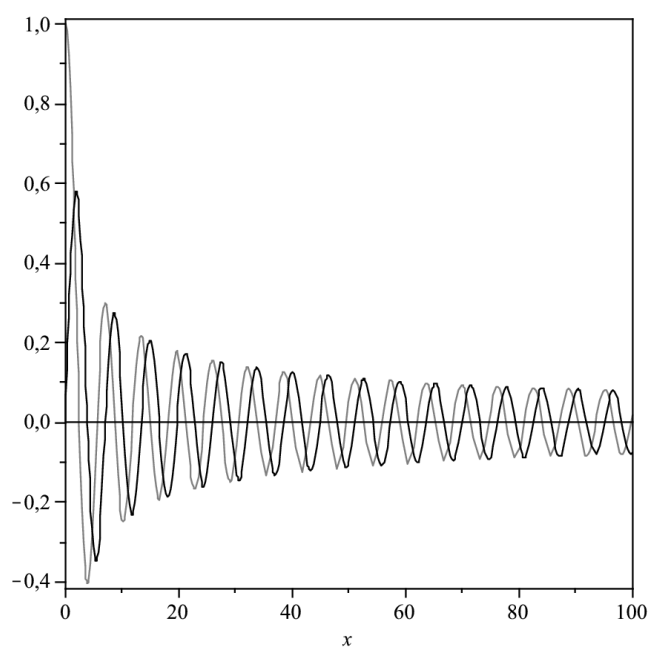
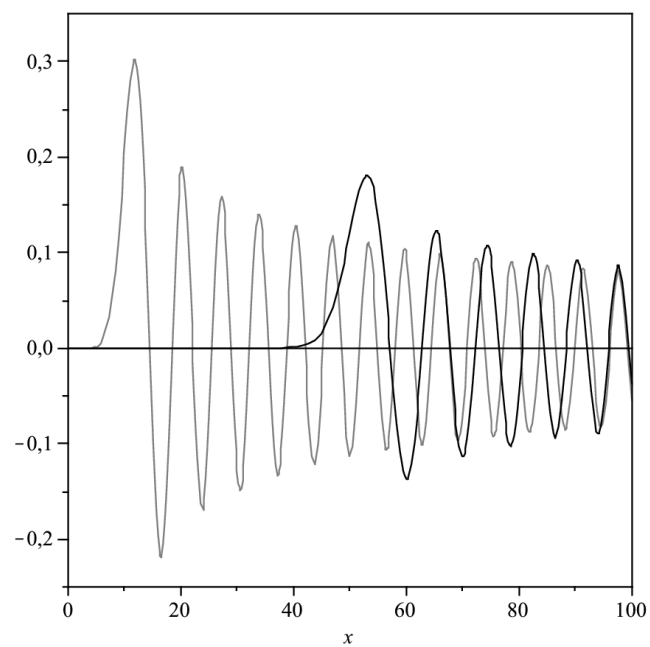
$$\begin{aligned} f''(x) + (a + bx)f(x) &= 0, \\ f &= \text{Ai}, \text{Bi}[-b^{1/3}(x + a/b)] \end{aligned} \quad (37)$$

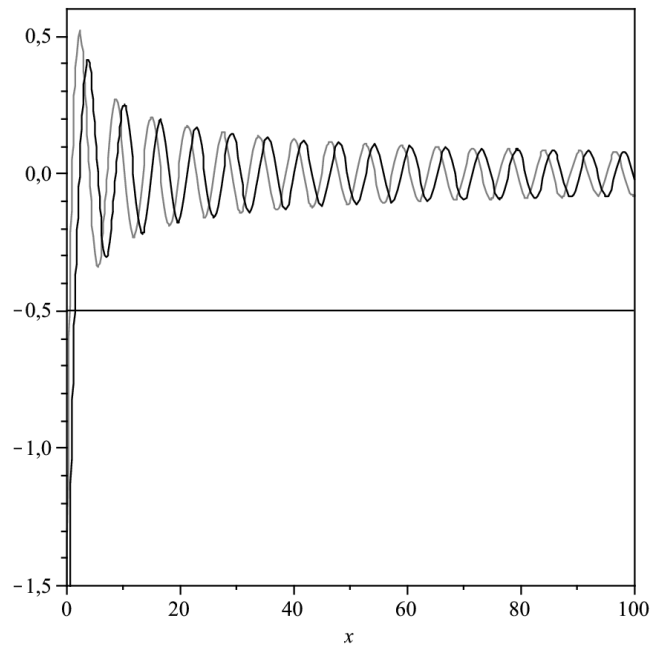
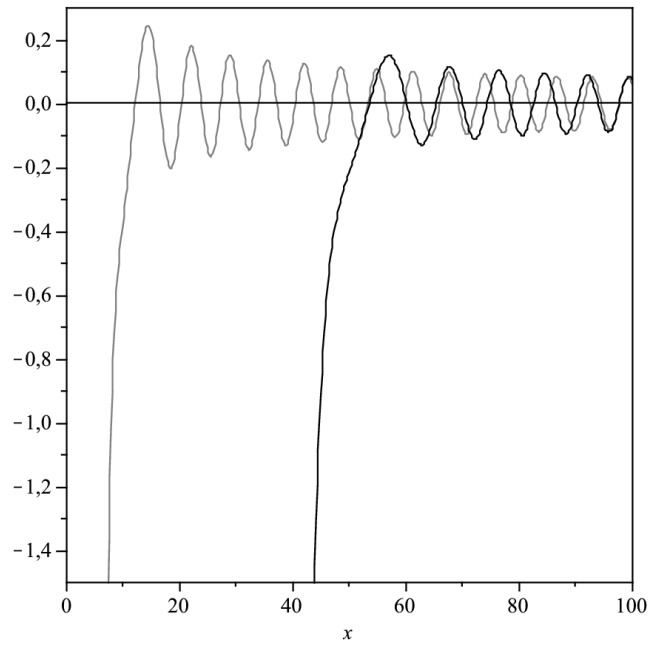
Асимптотики функций Эйри при больших значениях аргумента, полезные при рассмотрении квазиклассического приближения имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\sqrt{x}}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} [1 + O(x^{-4/3})], \\ \text{Ai}(-x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{x}}} \sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(x^{-4/3})], \\ \text{Bi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{x}}} e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} [1 + O(x^{-4/3})], \\ \text{Bi}(-x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{x}}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(x^{-4/3})]. \end{aligned} \quad (38)$$

Первые три нуля функции Бесселя аппроксимируются выражениями [9]:

$$\begin{aligned} T_{m1} &\simeq m + 1.855757m^{1/3} + 1.03315m^{-1/3} - 0.00403m^{-1} + O(m^{-5/3}), \\ T_{m2} &\simeq m + 3.2447m^{1/3} + 3.1584m^{-1/3} + O(m^{-1}), \\ T_{m3} &\simeq m + 4.3817m^{1/3} + 5.7598m^{-1/3} + O(m^{-1}). \end{aligned} \quad (39)$$

Рис. 1: Функции Бесселя с малым номером $t = 0, 1$ Рис. 2: Функции Бесселя с большим номером $t = 10, 50$

Рис. 3: Функции Неймана с малым номером $m = 0, 1$ Рис. 4: Функции Неймана с большим номером $m = 10, 50$

Во врезке приводятся основные свойства цилиндрических функций, часто используемые при аналитических преобразованиях [9, 10]:

$$\begin{aligned}
Z'_m &= \frac{m}{x} Z_m - Z_{m+1} = -\frac{m}{x} Z_m + Z_{m-1}, \\
Z_{m-1} + Z_{m+1} &= \frac{2m}{x} Z_m, \\
Z_{-m}(x) &= (-1)^m Z_m(x), \\
\int x Z_m^2(x) dx &= \frac{x^2}{2} (Z_m^2(x) - Z_{m-1}(x)Z_{m+1}(x)) \\
&= \frac{1}{2} (x^2 Z_m'^2(x) + (x^2 - m^2) Z_m^2(x)), \\
\int \frac{1}{x} Z_m^2(x) dx &= \frac{1}{2m} \left(1 + Z_0^2(x) + Z_m^2(x) - 2 \sum_{k=0}^m Z_k^2(x) \right), \\
\int Z_m(x) Z_{m+1}(x) dx &= \frac{1}{2} \left(1 + Z_0^2(x) - 2 \sum_{k=0}^m Z_k^2(x) \right), \\
\int x Z_m(ax) Z_m(bx) dx &= \frac{bx Z_m(ax) Z_{m-1}(bx) - ax Z_{m-1}(ax) Z_m(bx)}{a^2 - b^2} \quad (40)
\end{aligned}$$

Вронскиан:

$$W(J_m, Y_m) = J_m(x)Y_m'(x) - J_m'(x)Y_m(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

Род цилиндрической функции (Бесселя, Неймана, Ханкеля двух видов) выбирается в различных областях пространства исходя из требований на поведение поля вблизи оси ($\rho \rightarrow 0$) или на бесконечности ($\rho \rightarrow \infty$).

0.4 Цилиндрические векторные гармоники

Как мы видели ранее, уравнения для компонент E_z и H_z не зависят от других компонент и подчиняются скалярному волновому уравнению. Это наводит на мысль использовать их в качестве базовых потенциалов. Эквивалентный более общий подход был представлен в Главе 2, где отмечалось, что произвольное решение векторного волнового уравнения можно выразить через решения скалярного уравнения Гельмгольца ψ (потенциалы Дебая) следующим образом:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} = C_{TE} \mathbf{M} + C_{TM} \mathbf{N}, \quad (41)$$

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{i}_z \psi),$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{i}_z \psi). \quad (42)$$

При этом, если поле \mathbf{E} в бегущей или стоячей волне в резонаторе выражается только через вектор \mathbf{M} , то оно не имеет компоненты E_z (ротор вектора ортогонален этому вектору) и называется поперечно электрическим – полем ТЕ-типа, если же оно выражается только через вектор \mathbf{N} , то $H_z = 0$ и называется поперечно магнитным - полем ТМ-типа.

Стоит заметить, что названия "поперечно электрические" и "поперечно магнитные", были введены изначально для плоских волн и волн, распространяющихся в волноводах [11]. В этом случае соответствующие поля действительно перпендикулярны направлению распространения вдоль z . В случае же мод типа шепчущей галереи в цилиндрических координатах это название является обманчивым, поскольку такие моды распространяются по кругу в плоскости, перпендикулярной z . Более того, как мы увидим далее, возникает противоречие между аналогичными названиями в сферических координатах, поскольку там базовым является вектор \mathbf{i}_r , приблизительно перпендикулярный \mathbf{i}_z . В связи с этим применять термины ТЕ и ТМ к модам шепчущей галереи в произвольных телах следует с оговорками.

Если собственное решение для поля в системе имеет все компоненты, а значит не может быть выражено только через один из векторов \mathbf{N} или \mathbf{M} , то такая мода называется гибридной. В большинстве случаев моды типа шепчущей галереи в аксиально-симметричных телах являются гибридными, однако один из интегралов энергии, заключенной в E_z или H_z компоненте $\frac{1}{2} \int \epsilon \epsilon_0 E_z^2 dv$, $\frac{1}{2} \int \mu \mu_0 H_z^2 dv$ существенно преобладает над другим. В этом случае можно говорить о близости моды к ТЕ или ТМ типу.

Используя определения (41) и (25) выпишем в явном виде выражения для полей ТЕ и ТМ типа в бесконечном цилиндре (в системе СИ):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{TE} &= C_{TE} e^{im\phi + i\beta z} \left[\frac{im}{\rho} Z_m(k_\rho \rho) \mathbf{i}_\rho - \frac{\partial Z_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \mathbf{i}_\phi \right], \\
 \mathbf{V}_{TE} &= -C_{TE} \frac{i}{k_0 c} e^{im\phi + i\beta z} \\
 &\quad \times \left[i\beta \frac{\partial Z_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \mathbf{i}_\rho - \frac{m\beta}{\rho} Z_m(k_\rho \rho) \mathbf{i}_\phi + k_\rho^2 Z_m(k_\rho \rho) \mathbf{i}_z \right], \\
 \mathbf{E}_{TM} &= -C_{TM} \frac{1}{\epsilon \mu k_0} e^{im\phi + i\beta z} \\
 &\quad \times \left[i\beta \frac{\partial Z_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \mathbf{i}_\rho - \frac{m\beta}{\rho} Z_m(k_\rho \rho) \mathbf{i}_\phi + k_\rho^2 Z_m(k_\rho \rho) \mathbf{i}_z \right], \\
 \mathbf{V}_{TM} &= C_{TM} \frac{i}{c} e^{im\phi + i\beta z} \left[\frac{im}{\rho} Z_m(k_\rho \rho) \mathbf{i}_\rho - \frac{\partial Z_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \mathbf{i}_\phi \right].
 \end{aligned} \tag{43}$$

Здесь $k_\rho = \sqrt{k^2 - \beta^2}$, β – постоянная распространения вдоль оси z , которая может быть не только положительной и отрицательной для волн, распространяющихся, соответственно, в сторону убывания или возрастания z , но и мнимой, для волн открытых резонаторов, затухающих на бесконечности; m , чтобы удовлетворять условию непрерывности по ϕ , должно быть целым числом; $C_{TE/TM}$ – нормировочные константы. При выводе выражений для

сопряженных полей учтено уравнение (16). Для записи мы использовали вектор магнитной индукции $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$, чтобы избавиться от неудобных в системе СИ коэффициентов μ_0, ϵ_0 . Запись для полей в системе СГС получается при этом формальной заменой $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}/c$.

Найденное решение справедливо и для описания полей в градиентных круглых световодах. Однако ключевую роль в оптических волокнах играют моды, у которых азимутальный номер m мал, а постоянная распространения $\beta \sim \epsilon k_0$. В этом случае во внешней среде ($\epsilon = 1$) аргумент функций Бесселя становится мнимым $\sqrt{k_0^2 - \beta^2}\rho = i\sqrt{\beta^2 - k_0^2}\rho$, и для описания полей используются модифицированные функции Бесселя мнимого аргумента, быстро затухающие на бесконечности (функции Макдональда). Нас же будут интересовать совсем другие моды, те у которых, напротив, m велико, а составляющая волнового вектора вдоль оси z мала. В этом случае аргумент остается действительным во всех областях и для описаний поля снаружи используются функции Ханкеля.

0.5 Двумерные моды бесконечного диэлектрического цилиндра

Для понимания мод типа шепчущей галереи особый интерес представляют собственные моды бесконечного цилиндра, которые не имеют зависимости от z ($\beta = 0$). Пусть радиус цилиндра равен a , его диэлектрическая проницаемость $\epsilon = n^2$, а магнитная везде $\mu = 1$. Без потери общности можно положить, что диэлектрическая проницаемость в окружающем пространстве равна 1. Если требуется решение для мод цилиндра из материала с $\epsilon_i = n_i^2$ в среде с $\epsilon_o = n_o^2$, оно может быть получено формальной заменой в решении для вакуума $n \rightarrow n_i/n_o$ и $k_0 \rightarrow n_o k_0$. Используя (43)-(44) мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{TE} &= C_{TE} \left(\frac{im}{\rho} Z_m(k\rho) \mathbf{i}_\rho - \frac{\partial Z_m(k\rho)}{\partial \rho} \mathbf{i}_\phi \right) e^{im\phi} \\ \mathbf{B}_{TE} &= -C_{TE} \frac{ik_0}{c} \epsilon Z_m(k\rho) e^{im\phi} \mathbf{i}_z \\ \mathbf{E}_{TM} &= -C_{TM} k_0 Z_m(k\rho) e^{im\phi} \mathbf{i}_z \\ \mathbf{B}_{TM} &= C_{TM} \frac{i}{c} \left(\frac{im}{\rho} Z_m(k\rho) \mathbf{i}_\rho - \frac{\partial Z_m(k\rho)}{\partial \rho} \mathbf{i}_\phi \right) e^{im\phi} \end{aligned} \quad (44)$$

В этом случае поле каждого типа выглядит достаточно просто и включает только три компоненты. Для описания полей внутри цилиндра \mathbf{E}, \mathbf{H}_i выбираем функцию Бесселя $J_m(nk_0\rho)$, конечную в нуле, а для описания полей снаружи \mathbf{E}, \mathbf{H}_e — одну из функций Ханкеля.

При выбранной зависимости поля от времени $e^{-i\omega t}$ следует взять первую функцию Ханкеля $H_m^{(1)}(k_0\rho)$, которая описывает на бесконечности расходящуюся цилиндрическую волну $\propto e^{-i(\omega t - k\rho)}/\sqrt{k\rho}$ и удовлетворяет, таким

образом, условию излучения Зоммерфельда. Если бы мы выбрали зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$, решение вне цилиндра нужно было бы взять в виде $H_m^{(2)}(k_0\rho)$. Для выполнения на поверхности цилиндра радиусом a граничных условий требуется, чтобы были непрерывны тангенциальные компоненты E_τ и H_τ и (что не является независимым условием, см. Главу 2) нормальные D_n и B_n . То есть, с учетом того, что $\mu = 1$: $E_{i,\phi} = E_{e,\phi}$, $E_{i,z} = E_{e,z}$, $n^2 E_{i,\rho} = E_{e,\rho}$, $B_{i,\phi} = B_{e,\phi}$, $B_{i,z} = B_{e,z}$, $B_{i,\rho} = B_{e,\rho}$. Выбор граничных условий диктуется соображениями удобства и достаточности. Так, например, в данном случае из-за того, что в случае ТЕ-мод отсутствует компонента E_z , а в случае ТМ-мод компонента B_z , учет только нормальных граничных условий дает неполную систему уравнений для определения частот и коэффициентов.

В данном случае достаточно учесть только :

$$\begin{aligned} C_{TE,i} \frac{\partial J_m(nk_0a)}{\partial a} &= C_{TE,e} \frac{\partial H_m^{(1)}(k_0a)}{\partial a}, \\ C_{TE,i} n^2 J_m(nk_0a) &= C_{TE,e} H_m^{(1)}(k_0a), \\ C_{TM,i} \frac{\partial J_m(nk_0a)}{\partial a} &= C_{TM,e} \frac{\partial H_m^{(1)}(k_0a)}{\partial a}, \\ C_{TM,i} J_m(nk_0a) &= C_{TM,e} H_m^{(1)}(k_0a). \end{aligned} \quad (45)$$

Разделив в каждой паре первое равенство на второе получаем характеристические уравнения:

$$\frac{J'_m(\tilde{y})}{PnJ_m(\tilde{y})} = \frac{H_m^{(1)' }(\tilde{x})}{H_m^{(1)}(\tilde{x})}, \quad (46)$$

где $P = 1$ для ТЕ мод и $P = 1/n^2$ для ТМ мод и введены обозначения: $\tilde{y} = nk_0a$, $\tilde{x} = k_0a$. Штрих означает дифференцирование по полному аргументу функции. Иногда подобные уравнения немного короче записывают через логарифмические производные, поскольку $\ln' f(x) = f'(x)/f(x)$, что, правда, редко помогает при анализе.

0.6 Моды закрытого цилиндра

Рассмотрим теперь моды закрытого цилиндрического резонатора с проводящими стенками радиусом a и длиной L ($-L/2 < z < L/2$), заполненного средой с проницаемостями ϵ, μ . От бегущих по z волн в выражениях (43) перейдем к стоячим волнам по z , а в качестве цилиндрических функций выбираем функции Бесселя.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{TE} &= C_{TE} \left(\frac{im}{\rho} J_m(k_\rho\rho) \mathbf{i}_\rho - \frac{\partial J_m(k_\rho\rho)}{\partial \rho} \mathbf{i}_\phi \right) \frac{\cos(\beta z)}{\sin(\beta z)} e^{im\phi} \\ \mathbf{B}_{TE} &= -C_{TE} \frac{i}{k_0c} \left(\beta \left[\frac{\partial J_m(k_\rho\rho)}{\partial \rho} \mathbf{i}_\rho + i \frac{m}{\rho} J_m(k_\rho\rho) \mathbf{e}_\phi \right] \frac{-\sin(\beta z)}{\cos(\beta z)} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
& + k_\rho^2 J_m(k_\rho \rho) \mathbf{i}_z \frac{\cos(\beta z)}{\sin(\beta z)} e^{im\phi} \\
\mathbf{E}_{TM} &= -C_{TM} \frac{1}{\epsilon \mu k_0} \left(\beta \left[\frac{\partial J_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \mathbf{i}_\rho + i \frac{m}{\rho} J_m(k_\rho \rho) \mathbf{e}_\phi \right] \frac{\cos(\beta z)}{-\sin(\beta z)} \right. \\
& + \left. k_\rho^2 J_m(k_\rho \rho) \frac{\sin(\beta z)}{\cos(\beta z)} \mathbf{i}_z \right) e^{im\phi} \\
\mathbf{V}_{TM} &= C_{TM} \frac{i}{c} \left(\frac{im}{\rho} J_m(k_\rho \rho) \mathbf{e}_\rho - \frac{\partial J_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi \right) \frac{\sin(\beta z)}{\cos(\beta z)} e^{im\phi}
\end{aligned}$$

Легко видеть, что равенство нулю тангенциальных компонент поля \mathbf{E} и нормальных поля \mathbf{H} на образующей и на плоских границах удовлетворяются при выполнении условий:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_m(\sqrt{k_{TE,mpq}^2 - \beta_p^2} a)}{\partial a} &= 0 \\
J_m(\sqrt{k_{TM,mpq}^2 - \beta_p^2} a) &= 0 \\
\beta_p &= \frac{p\pi}{L}, \tag{48}
\end{aligned}$$

где p - целое, а q - натуральное число, обозначающее номер корня трансцендентного уравнения.

0.7 Моды конечного диэлектрического цилиндра

Точное решение электродинамической задачи о собственных колебаниях конечного диэлектрического цилиндра в виде конечного ряда невозможно. Наибольшая сложность связана с полями вблизи углов. Между тем, эта задача имеет большое практическое значение, поскольку такие резонаторы широко применяются в СВЧ технике. Для оптического диапазона такой резонатор в планарном исполнении впервые, видимо, предложил в 1969 году Маркатили (Рис.1) [2].

В настоящее время добротность диэлектрических цилиндрических резонаторов в оптическом диапазоне, изготавливаемых методами интегральной технологии из кремния достигает 5×10^5 [3].

Рассмотрим, какие подходы возможны к решению задачи о собственных колебаниях в изотропном диэлектрическом цилиндрическом резонаторе. На следующей диаграмме показана последовательность приближений, которые возможны для того, чтобы получить ответ. Эта последовательность приложима, естественно, не только к цилиндрическим резонаторам, но и к любым другим.

Для решения похожей задачи о нахождении полей в прямоугольном диэлектрическом волноводе Маркатили предложил использовать метод частичных областей. В конечном диэлектрическом цилиндре, когда $\beta \neq 0$

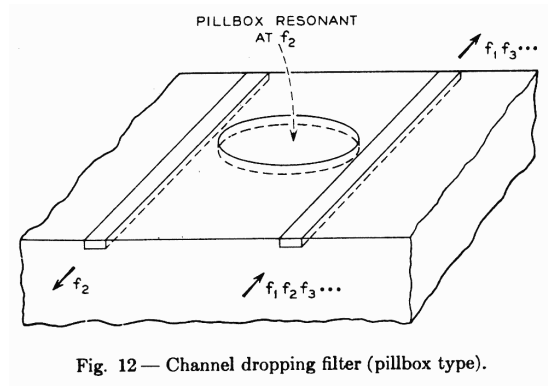


Рис. 5: Фильтр на основе резонатора в форме таблетки, предложенный Маркатили

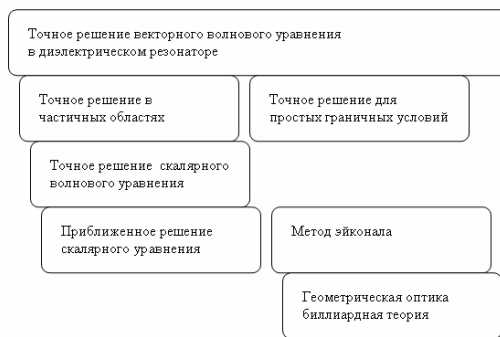


Рис. 6: Схема подходов к рассмотрению собственных мод в диэлектрическом резонаторе

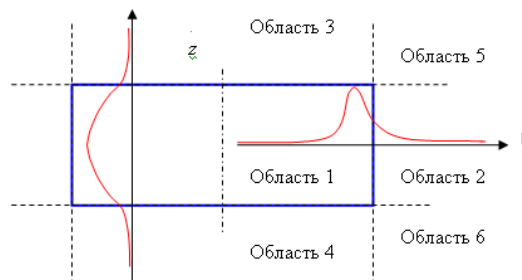


Рис. 7: Метод частичных областей

моды уже не могут быть чистыми полями ТЕ или ТМ типа и являются гибридными.

Попробуем представить поле как сумму полей обоих типов $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{TE} + \mathbf{E}_{TM}$. Сошьем бегущие волны на границе областей 1 и 2. Запишем все граничные условия (система получается избыточной), соответственно, для E_ρ , E_ϕ , E_z , B_ρ , B_ϕ , B_z :

$$\begin{aligned}
& C_{TE,1} \frac{m\epsilon}{\rho} J_m(k_{1\rho}\rho) + C_{TM,1} \frac{\beta}{k_0} \frac{\partial J_m(k_{1\rho}\rho)}{\partial \rho} \\
&= C_{TE,2} \frac{m}{\rho} H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho) + C_{TM,2} \frac{\beta}{k_0} \frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho)}{\partial \rho} \\
& C_{TE,1} \frac{\partial J_m(k_{1\rho}\rho)}{\partial \rho} + C_{TM,1} \frac{m\beta}{\epsilon k_0 \rho} J_m(k_{1\rho}\rho) \\
&= C_{TE,2} \frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho)}{\partial \rho} + C_{TM,2} \frac{m\beta}{k_0 \rho} H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho) \\
& C_{TM,1} \frac{1}{\epsilon} k_{1\rho}^2 J_m(k_{1\rho}\rho) = C_{TM,2} k_{2\rho}^2 H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho) \\
& C_{TE,1} \frac{m\beta}{k_0 \rho} J_m(k_{1\rho}\rho) + C_{TM,1} \frac{\partial J_m(k_{1\rho}\rho)}{\partial \rho} \\
&= C_{TE,2} \frac{m\beta}{k_0 \rho} H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho) + C_{TM,2} \frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho)}{\partial \rho} \\
& C_{TE,1} \frac{\beta}{k_0} \frac{\partial J_m(k_{1\rho}\rho)}{\partial \rho} + C_{TM,1} \frac{m}{\rho} J_m(k_{1\rho}\rho) \\
&= C_{TE,2} \frac{\beta}{k_0} \frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho)}{\partial \rho} + C_{TM,2} \frac{m}{\rho} H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho) \\
& C_{TE,1} k_{1\rho}^2 J_m(k_{1\rho}\rho) = C_{TE,2} k_{2\rho}^2 H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho)
\end{aligned} \tag{49}$$

Из третьего и последнего равенства получаем:

$$\begin{aligned}
C_{TM,2} &= C_{TM,1} \frac{1}{\epsilon} \frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2} \frac{J_m(k_{1\rho}a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)} \\
C_{TE,2} &= C_{TE,1} \frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2} \frac{J_m(k_{1\rho}a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
& C_{TE,1} J_m(k_{1\rho}a) \frac{m}{a} \left(\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2} - \epsilon \right) \\
&= C_{TM,1} \frac{\beta}{k_0} \left(\frac{\partial J_m(k_{1\rho}a)}{\partial a} - \frac{1}{\epsilon} \frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2} \frac{J_m(k_{1\rho}a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)} \frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}{\partial a} \right) \\
& C_{TE,1} \left(\frac{\partial J_m(k_{1\rho}a)}{\partial a} - \frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2} \frac{J_m(k_{1\rho}a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)} \frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}{\partial a} \right) \\
&= C_{TM,1} J_m(k_{1\rho}a) \frac{m\beta}{\epsilon k_0 a} \left(\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{51}$$

Приравнивая определитель матрицы этой системы, или просто избавляясь от коэффициентов $C_{TE, TM}$, деля первое равенство на второе, получаем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial J_m(k_{1\rho} a)}{\partial a} - \frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2} \frac{J_m(k_{1\rho} a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho} a)} \frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho} a)}{\partial a} \right] \\ & \times \left[\frac{\partial J_m(k_{1\rho} a)}{\partial a} - \frac{1}{\epsilon} \frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2} \frac{J_m(k_{1\rho} a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho} a)} \frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho} a)}{\partial a} \right] \\ & = J_m^2(k_{1\rho} a) \frac{m^2}{\epsilon a^2} \left(\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2} - 1 \right) \left(\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2} - \epsilon \right) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{J'_m(y)}{J_m(y)} - \frac{y}{x} \frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)} \right] \left[\frac{J'_m(y)}{J_m(y)} - \frac{y}{\epsilon x} \frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)} \right] \\ & = \frac{m^2}{\epsilon y^2} \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right) \left(\frac{y^2}{x^2} - \epsilon \right), \end{aligned} \quad (53)$$

где введены обозначения $y = k_{1\rho} a$, $x = k_{2\rho} a$. Штрих означает дифференцирование по аргументу.

Моды шепчущей галереи, описываются функциями Бесселя с большими номерами, у которых первый максимум появляется при значениях аргумента, близких к номеру ($y \simeq m$). Если $\beta \ll k$, то последняя скобка в правой части (53) и, соответственно, вся правая часть оказывается близка к нулю (другие множители в правой части будут порядка единицы). При этом уравнение (53) приблизительно распадается на два, соответствующих равенству нулю квадратных скобок. Эти решения соответствуют модам, близким к TE и TM , полученным ранее для бесконечного цилиндра.

Попробуем найти собственные значения для волнового числа k_0 (резонансные частоты), решив характеристическое уравнение, используя простые приближения. Сначала решим однородное уравнение (53) с нулевой правой частью, а потом найдем поправки возникающие вследствие ненулевой правой части. Будем искать решения вблизи нулей функции Бесселя $J_m(y^{(0)} = t_{mq}) = 0$, где t_{mq} — q -й корень этого уравнения, в виде $(y^{(1)} \simeq t_{mq} - \Delta_{TE, TM})$.

$$J_m(y) \simeq J_m(t_{mq}) - \Delta_{TE, TM} J'_m(t_{mq}) = -\Delta_{TE, TM} J'_m(t_{mq}) \quad (54)$$

Приближения для функций Ханкеля ($H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iY_m(x)$) мы найдем, используя следующие соображения. Для мод типа шепчущей галереи в прилегающем пространстве аргумент функций меньше их номера. Это значит, что функция Бесселя очень мала, а функция Неймана, напротив, велика. Поэтому пока временно отбросим функцию Бесселя (она нам понадобится, когда будем искать мнимую часть k_0). Используя асимптотики,

приведенные в предыдущей лекции, получим для $x \gg 1$:

$$\frac{\partial Y_m(x)}{\partial x} \simeq -\frac{\sqrt{m^2 - x^2}}{x} Y_m(x) \quad (55)$$

Позднее мы увидим, что получившееся выражение имеет простой смысл в рамках геометрической оптики. Таким образом, получаем для квази-ТЕ и квази-ТМ мод:

$$\begin{aligned} \Delta_{TE, TM}^{(1)} &\simeq \frac{x^{(0)2}}{P y^{(0)} \sqrt{m^2 - x^{(0)2}}} \\ y^{(0)} &= \sqrt{\epsilon k_0^{(0)2} - \beta^2} a = t_{mq} \\ x^{(0)2} &= (k_0^{(0)2} - \beta^2) a^2 = \frac{t_{mq}^2}{\epsilon} \left[1 - \frac{\beta^2 a^2}{t_{mq}^2} (\epsilon - 1) \right] \\ y^{(1)} &= y^{(0)} - \Delta_{TE, TM}^{(0)} \\ k_0^{(1)} &= \sqrt{\frac{y^{(1)2} - \beta^2 (\epsilon - 1)}{\epsilon a^2}} \end{aligned} \quad (56)$$

где, как и ранее, $P_{TE} = 1$ и $P_{TM} = 1/n^2$.

Добавим теперь правую часть:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\Delta^{(2)}} - \frac{1}{\Delta_{TE}^{(1)}} \right] \left[\frac{1}{\Delta^{(2)}} - \frac{1}{\Delta_{TM}^{(1)}} \right] &= \alpha^{(1)} \\ \alpha^{(1)} &= \frac{m^2}{\epsilon y^2} \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right) \left(\frac{y^2}{x^2} - \epsilon \right) = \frac{m^2 \beta^2 (\epsilon - 1)^2 k_0^2 a^4 \beta^2}{\epsilon y^2 x^4} \end{aligned} \quad (57)$$

Полагая, что $\Delta_{TE, TM}^{(2)} - \Delta_{TE, TM}^{(1)} \ll \Delta_{TE, TM}^{(1)}$, получаем приближение следующего порядка:

$$\frac{1}{\Delta_{TE, TM}^{(2)}} \simeq \frac{1}{\Delta_{TE, TM}^{(1)}} \pm \frac{\alpha^{(1)}}{1/\Delta_{TE}^{(1)} - 1/\Delta_{TM}^{(1)}} \quad (58)$$

Задание Полагая, что $\beta \ll k_0$, выписать асимптотику $\Delta^{(1)}$ вплоть до членов порядка $(\beta/t_{mq})^2$.

Для практических применений чаще всего достаточны более простые приближения:

$$\Delta_{TE, TM} \simeq \frac{x^{(0)2}}{P y^{(0)} \sqrt{m^2 - x^{(0)2}}} \simeq \frac{1}{P \sqrt{\epsilon(\epsilon - 1)}} = \frac{1}{P n \sqrt{n^2 - 1}} \quad (59)$$

Таким образом, в первом приближении можно считать, что поля в диэлектрическом резонаторе и его собственные частоты эквивалентны тем, которые получаются в закрытом резонаторе радиусом, увеличенным на величину $\Delta_{TE, TM}/(k_0 n)$ с простейшими граничными условиями $H_n = E_n = 0$. Эти

условия отличаются от граничных условий в резонаторе с металлическими стенками и соответствует резонатору, окруженному средой с $\epsilon, \mu \rightarrow \infty$.

Мы пока еще не полностью нашли решение для собственных частот в конечном цилиндре, поскольку неизвестной осталась величина β . Выпишем условия на границе между частичными областями 1 и 3 на верхней плоскости диска, при $z = h/2$, где h – толщина диска. Поскольку обе эти области захватывают ноль, распределение по радиусу описывается в них функцией Бесселя $J_m(k_\rho \rho)$, чтобы поля были непрерывны следует положить, что $k_{1\rho} = k_{3\rho}$, то есть $\epsilon k_0^2 - \beta^2 = k_0^2 - \beta_3^2$, откуда в предположении $\beta \ll k_0$ следует, что $\beta_3 = i\gamma$ – величина мнимая.

$$\begin{aligned}
& C_{TE,1} \frac{im}{\rho} J_m(k_\rho \rho) \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} + C_{TM,1} \frac{1}{\epsilon k_0} \beta \frac{\partial J_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} \\
&= C_{TE,3} \frac{im}{\rho} J_m(k_\rho \rho) e^{-\gamma h/2} - C_{TM,3} \frac{\gamma}{k_0} \frac{\partial J_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} e^{-\gamma h/2} \\
&- C_{TE,1} \frac{\partial J_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} + C_{TM,1} \frac{im\beta}{\epsilon k_0 \rho} J_m(k_\rho \rho) \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} = \\
&- C_{TE,3} \frac{\partial J_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} e^{-\gamma h/2} - C_{TM,3} \frac{im\gamma}{k_0 \rho} J_m(k_\rho \rho) e^{-\gamma h/2} \\
& C_{TM,1} \frac{\sin(\beta h/2)}{\cos(\beta h/2)} = C_{TM,3} e^{-\gamma h/2} \\
& C_{TE,1} \frac{i\beta}{k_0 c} \frac{\partial J_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} + C_{TM,1} \frac{-m}{c\rho} J_m(k_\rho \rho) \frac{\sin(\beta h/2)}{\cos(\beta h/2)} \\
&= -C_{TE,3} \frac{i\gamma}{k_0 c} \frac{\partial J_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} e^{-\gamma h/2} + C_{TM,3} \frac{-m}{c\rho} J_m(k_\rho \rho) e^{-\gamma h/2} \\
&- C_{TE,1} \frac{m}{k_0 c \rho} \beta J_m(k_\rho \rho) \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} - C_{TM,3} \frac{i}{c} \frac{\partial J_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \frac{\sin(\beta h/2)}{\cos(\beta h/2)} \\
&= C_{TE,3} \frac{m\gamma}{k_0 c \rho} J_m(k_\rho \rho) e^{-\gamma h/2} - C_{TM,3} \frac{i}{c} \frac{\partial J_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} e^{-\gamma h/2} \\
& C_{TE,1} \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} = C_{TE,3} e^{-\gamma h/2}
\end{aligned} \tag{60}$$

После подстановок получаем:

$$\begin{aligned}
\beta \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} &= -\gamma \epsilon \frac{\sin(\beta h/2)}{\cos(\beta h/2)} \\
\beta \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} &= -\gamma \epsilon \frac{\sin(\beta h/2)}{\cos(\beta h/2)} \\
C_{TM,1} \frac{\sin(\beta h/2)}{\cos(\beta h/2)} &= C_{TM,3} e^{-\gamma h/2} \\
\beta \frac{-\sin(\beta h/2)}{\cos(\beta h/2)} &= -\gamma \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} \\
\beta \frac{-\sin(\beta h/2)}{\cos(\beta h/2)} &= -\gamma \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} \\
C_{TE,1} \frac{\cos(\beta h/2)}{\sin(\beta h/2)} &= C_{TE,3} e^{-\gamma h/2}
\end{aligned} \tag{61}$$

Из первого/второго и четвертого/пятого уравнений видно, что одновременно удовлетворить всем уравнениям не удастся, поскольку получается, что $\tan^2(\beta h/2) = -1$. Однако в приближении близости мод к TM и TE типам волн система распадается на две, соответственно, включающие первые или последние три равенства, которые дают следующие характеристические выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{TM}}{\epsilon \sqrt{k_0^2(\epsilon - 1) - \beta_{TM}^2}} &= \frac{-\tan(\beta_{TM} h/2)}{\text{ctg}(\beta_{TM} h/2)} \\ \frac{\beta_{TE}}{\sqrt{k_0^2(\epsilon - 1) - \beta_{TE}^2}} &= \frac{\text{ctg}(\beta_{TE} h/2)}{-\tan(\beta_{TE} h/2)} \end{aligned} \quad (62)$$

Это – уравнения для волн в направляющем диэлектрическом слое, хорошо известные в теории оптических волноводов. Решить эти уравнения можно в приближении малости β по сравнению с k_0 .

Задание Полагая, что $\beta \ll k_0$, выписать асимптотику $\beta^{(1)}h/2$, считая, что $\beta^{(0)}h/2 = m\pi/2$ (как в резонаторе с металлическими стенками). Показать, что в первом приближении можно считать, что диэлектрический слой эквивалентен закрытому слою толщины, увеличенной с обеих сторон на $\Delta_{TM,TE}\lambda/(2\pi n)$ (индексы TE и TM меняются местами по сравнению с граничными условиями на цилиндрической поверхности).

0.8 Излучательная добротность диэлектрического цилиндра

Характеристические уравнения открытых резонаторов являются комплексными, следовательно и их решения – собственные значения для волновых чисел k_0 , а значит и частот ω являются комплексными. Мнимая часть вектора $k_0 = k_0' + ik_0''$ описывает потери открытого резонатора на излучение в окружающее пространство. При этом излучательная добротность

$$Q_{rad} = \left| \frac{k_0'}{2k_0''} \right| \quad (63)$$

Рассмотрим однородное характеристическое уравнение

$$\frac{J_m'(y)}{J_m(y)} = \frac{Py}{x} \frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)} \quad (64)$$

и найдем мнимые поправки к его действительному решению. Небольшими поправками на мнимую часть, вызванными гибридным характером мод пренебрежем. Найдем поправки к каждому из входящих в уравнение членов. Используем прежнее приближение в виде $y \simeq t_{mq} - \Delta_{TE, TM}$

$$\frac{J_m'(y)}{J_m(y)} \simeq \frac{J_m'(y')}{J_m(y')} \left[1 + ik_0'' \frac{\partial y'}{\partial k_0} \left(\frac{J_m''(y')}{J_m'(y')} - \frac{J_m'(y')}{J_m(y')} \right) \right] \simeq \frac{J_m'(y')}{J_m(y')} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[1 + ik_0'' k_0' \frac{\epsilon a^2}{y'} \left(-\frac{1}{y'} - \frac{y'^2 - m^2}{y'^2} \frac{J_m(y')}{J_m'(y')} - \frac{J_m'(y')}{J_m(y')} \right) \right] \\
& \frac{Py}{x} \frac{H_m^{(1)'}(x')}{H_m^{(1)}(x')} \simeq \frac{Py' Y_m'(x')}{x' Y_m(x')} \times \\
& \times \left[1 + ik_0'' \frac{\partial x'}{\partial k_0} \left(\frac{1}{y'} \frac{\partial y'}{\partial k_0} / \frac{\partial x'}{\partial k_0} - \frac{1}{x'} + \frac{Y_m''(x')}{Y_m'(x')} - \frac{Y_m'(x')}{Y_m(x')} \right) \right. \\
& \left. - i \frac{J_m'(x') Y_m(x') - J_m(x') Y_m'(x')}{Y_m(x') Y_m'(x')} \right] \tag{65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \simeq \frac{Py' Y_m'(x')}{x' Y_m(x')} \left[1 + ik_0'' k_0' \frac{a^2}{x'} \left(\frac{\epsilon x'}{y'^2} - \frac{2}{x'} - \frac{x'^2 - m^2}{x'^2} \frac{Y_m(x')}{Y_m'(x')} - \frac{Y_m'(x')}{Y_m(x')} \right) \right. \\
& \left. + i \frac{2}{\pi x' Y_m(x') Y_m'(x')} \right] \tag{66}
\end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{k_0'}{2k_0''} \simeq \frac{\pi x' k_0'^2 a^2}{4Py'} \left[\left(\frac{Py'}{x'} \left(\frac{m^2}{x'^2} - 1 \right) - \frac{\epsilon x'}{y'} \left(\frac{m^2}{y'^2} - 1 \right) \right) Y_m^2(x') \right. \\
& \left. - (1 - P\epsilon) \frac{Py'}{x'} Y_m'^2(x') - 2Py' \left(\frac{1}{x'^2} - \frac{\epsilon}{y'^2} \right) Y_m(x') Y_m'(x') \right] \tag{67}
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в квадратных скобках обращается в нуль для мод ТМ. Последнее слагаемое мало и для азимутальных мод бесконечного цилиндра ($\beta = 0$, $y'^2 = \epsilon x'^2$) обращается в нуль.

Используя аппроксимации для функции Неймана и ее производной в тех же приближениях, что и ранее, получаем более простую формулу для добротности:

$$\begin{aligned}
Q_{rad} &\simeq \frac{P\pi\epsilon(m^2 - x'^2)Y_m^2(x')}{4} \\
&\simeq \frac{P\epsilon\sqrt{m^2 - x'^2}}{2} \exp \left[m \operatorname{Arth} \left(\frac{\sqrt{m^2 - x'^2}}{m} \right) - \sqrt{m^2 - x'^2} \right] \tag{68}
\end{aligned}$$

Обсуждение точности подобных приближений будет дано при обсуждении аналогичных расчетов излучательной добротности в сфере.

Литература

- [1] V. S. Ilchenko V.B. Braginsky and Kh. S. Bagdassarov. Experimental observation of fundamental microwave absorption in high-quality dielectric crystals. *Phys. Lett. A*, 120:300, 1987.
- [2] E.A.J.Marcatili. Bends in optical dielectric guides. *Bell Syst. Tech. J.*, 48:2103, 1969.
- [3] M. Borselli, K. Srinivasan, P. E. Barclay, and O. Painter. Rayleigh scattering, mode coupling, and optical loss in silicon microdisks. *Appl. Phys. Lett.*, 85:3693–3695, 2004.
- [4] J. U. Noeckel. Mode structure and ray dynamics of a parabolic dome microcavity. *Phys. Rev. E*, 62(6):8677–8699, 2000.
- [5] A. B. Matsko A. A. Savchenkov, V. S. Ilchenko and L. Maleki. Kilohertz optical resonances in dielectric crystal cavities. *Phys. Rev. A*, 70:051804, 2004.
- [6] V.S. Ilchenko, A.A. Savchenkov, A.B. Matsko, and L. Maleki. Nonlinear optics and crystalline whispering gallery mode cavities. *Phys. Rev. Lett.*, 92:043903, 2004.
- [7] V. S. Ilchenko A. A. Savchenkov, A. B. Matsko and L. Maleki. Optical resonators with ten million finesse. *Opt. Express*, 15:6768–6773, 2007.
- [8] M.A.Morgan. Generalized coupled azimuthal potentials for electromagnetic fields in inhomogeneous media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 36(12):1735–1743, 1988.
- [9] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*. Наука, Москва, 1964.
- [10] М. Абрамовиц и И. Стиган. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. Наука, Москва, 1979.
- [11] S.A.Schelkunoff. Transmission theory of plane electromagnetic waves. *Pros. Inst. Radio Engineers*, 25(11):1457–1492, 1937.