

Глава 3

Резонатор Фабри-Перо

В 1899 году французы Шарль Фабри и Альфред Перо описали многолучевой интерферометр, состоящий из двух плоскопараллельных частично посеребренных стеклянных пластин, который позволил существенно повысить разрешение спектральных измерений. Однако триумфальное шествие этого устройства, уже как резонатора Фабри-Перо (РФП), способного запасать оптическую энергию, начинается после того, как почти одновременно в 1958 году Прохоров и Шавлов с Таунсом предложили его использовать для создания лазера. Современные патентные тяжбы, продолжавшиеся до 1987 года, свидетельствуют, правда, что приоритет следует отдать Гордону Гоулду, предложившему схему с открытым резонатором на год раньше (Гоулд также первым предложил слово “лазер”). Наконец, 16 мая 1960 года Теодор Мейман запустил первый в мире лазер на основе, освещаемого лампой-вспышкой, рубинового стержня, резонатором Фабри-Перо в котором служил сам стержень с посеребренными торцами. Позднее, в том же 1960 году заработал первый гелий-неоновый лазер в лаборатории имени Белла, в котором уже использовался метровый резонатор Фабри-Перо с плоскими юстируемыми зеркалами с отражающим многослойным диэлектрическим покрытием.

3.1 Матрица рассеяния

Для описания поведения волны при падении на границу раздела двух сред удобно пользоваться формализмом матрицы рассеяния \mathbf{S} [1, Гл. 3]. Если на оптическую систему падают волны с амплитудами a_i , то в линейной системе они будут связаны с выходящими из системы в результате преломления и отражения волнами b_i соотношением

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}. \quad (3.1)$$

Для описания преломления и отражения достаточно взять матрицу 2×2 (рис. 3.1):

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2, \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

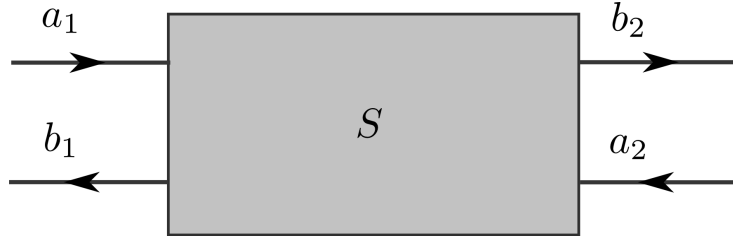


Рис. 3.1: Схема оптического элемента, описываемого матрицей рассеяния

Если в оптическом элементе, описываемом матрицей рассеяния, нет потерь, то должно выполняться условие сохранения энергии:

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2, \quad (3.3)$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{a}^+ \mathbf{a} = \mathbf{b}^+ \mathbf{b} = \mathbf{a}^+ \mathbf{S}^+ \mathbf{S} \mathbf{a}. \quad (3.4)$$

Верхний индекс ‘+’ означает транспонированную комплексно-сопряженную матрицу

$$\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}^{*T}. \quad (3.5)$$

Следовательно,

$$\mathbf{a}^+ (\mathbf{I} - \mathbf{S}^+ \mathbf{S}) \mathbf{a} = 0, \quad (3.6)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица, и значит матрица \mathbf{S} должна быть унитарной:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^+ \mathbf{S} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{S}^+ &= \mathbf{S}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Покомпонентно расписывая условие (3.7):

$$\begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

получаем:

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 &= |S_{22}|^2 + |S_{21}|^2 = 1, \\ S_{21} S_{11}^* + S_{22} S_{12}^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если на рисунке (3.1) все волны \mathbf{a} и \mathbf{b} пустить в противоположных направлениях, то входными сигналами станут волны \mathbf{b} , а выходными – \mathbf{a} . Такое обращение времени эквивалентно замене $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}^*$ и $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a}^*$. При этом матрица рассеяния не изменится ($\mathbf{a}^* = \mathbf{S} \mathbf{b}^*$) или

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^* \mathbf{b}. \quad (3.10)$$

Домножая слева обе части равенства на обратную матрицу, получаем:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{S}^*]^{-1}\mathbf{a}. \quad (3.11)$$

Сравнивая теперь последний результат с (3.7) и (3.1) и получаем, что

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^+, \quad (3.12)$$

что означает требование симметричности матрицы \mathbf{S} , и значит $S_{12} = S_{21}$. Вместе с этим новым условием в итоге формулируем такие требования на компоненты \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} S_{12} &= S_{21}, \\ |S_{11}|^2 &= |S_{22}|^2, \\ |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 &= 1, \\ S_{12}S_{11}^* + S_{22}S_{12}^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Эти уравнения связывают 4 комплексных или 8 действительных значений, определяющих матрицу рассеяния. При этом первое уравнение является комплексным, второе и третье - действительным, а последнее, хотя и является комплексным, но, учитывая первые два, накладывает ограничение лишь на фазы комплексных коэффициентов. В итоге получаем пять независимых действительных уравнений, а значит в системе без потерь матрица рассеяния полностью описывается тремя действительными параметрами. Вводя амплитуды и фазы компонентов \mathbf{S} , легко показать, что такая матрица имеет вид:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} |S_{11}|e^{i\psi_r} & \sqrt{1 - |S_{11}|^2}e^{i\psi_t} \\ \sqrt{1 - |S_{11}|^2}e^{i\psi_t} & |S_{11}|e^{i(2\psi_t - \pi - \psi_r)} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

С коэффициентами матрицы рассеяния связаны энергетические коэффициенты отражательной \mathcal{R} и пропускательной способности \mathcal{T} .

$$\mathcal{R} = |S_{11}|^2 = |S_{22}|^2, \quad \mathcal{T} = |S_{12}|^2. \quad (3.15)$$

При этом

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1. \quad (3.16)$$

Во многих случаях, когда интересует лишь поведение волны вдали от рассеивателя, удобно выбрать входные и выходные поверхности, не совпадающие в общем случае с границами раздела, так, чтобы фазовые углы $\psi_r = \pi$ и $\psi_t = \pi/2$. В этом случае матрица рассеяния принимает простой вид:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -R & iT \\ iT & -R \end{bmatrix}, \quad R^2 + T^2 = 1. \quad (3.17)$$

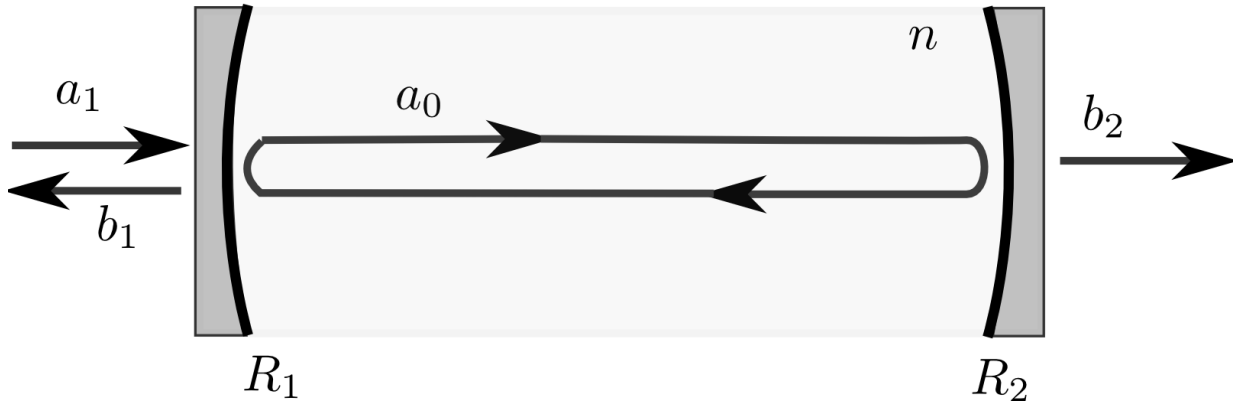


Рис. 3.2: Схема оптического резонатора Фабри-Перо.

При этом коэффициенты R и T имеют смысл амплитудных коэффициентов отражения и пропускания $R^2 = \mathcal{R}$, $T^2 = \mathcal{T}$. Знак минус перед R выбран так, чтобы соответствовать полному отражению электромагнитной волны от металлической поверхности — при этом суммарное электрическое поле падающей и отраженной волны на границе должно обращаться в нуль и соответствовать узлу стоячей волны. Такой вид имеет, в частности, матрица рассеяния для волны, проходящей через границу раздела диэлектриков при переходе из оптически менее плотной в оптически более плотную среду. При переходе в обратном направлении амплитудный коэффициент отражения положителен.

3.2 Одномерный резонатор Фабри-Перо

Рассмотрим, как введенная матрица рассеяния может быть использована для нахождения характеристик интерферометра Фабри-Перо, образованного двумя зеркалами с коэффициентами отражения R_1 и R_2 и, соответственно, пропускания T_1 и T_2 , расположенными на расстоянии d , заполненный средой с показателем преломления n (рис. 3.2). Если потерь в зеркалах нет, то

$$T_1 = \sqrt{1 - R_1^2}, \quad T_2 = \sqrt{1 - R_2^2}, \quad (3.18)$$

в противном случае

$$R_i^2 + T_i^2 = \mathcal{R}_i + \mathcal{T}_i = 1 - \mathcal{L}_i, \quad (3.19)$$

где \mathcal{L}_i — потери на зеркале. Обозначим амплитуду волны, падающей на первое входное зеркало, через a_1 , а отраженной через b_1 . Соответственно, амплитуда выходящей из

второго зеркала b_2 . За один проход внутри резонатора волна приобретает фазовый сдвиг

$$\Delta\phi = 2nk_0d. \quad (3.20)$$

Здесь $k_0 = 2\pi/\lambda$ – постоянная распространения волны в вакууме (λ – длина волны в вакууме).

Обычно для нахождения поля внутри резонатора a_0 используется геометрическая прогрессия [1]. Волна ищется как сумма прошедшей через входное зеркало волны $a_T = iT_1a_1$ и затем частичных многократно отраженных от обоих зеркал волн:

$$a_0 = iT_1a_1 \sum_{j=0}^{\infty} (R_1R_2e^{i\Delta\phi})^j = \frac{iT_1}{1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}} a_1, \quad (3.21)$$

Но можно тот же ответ, и даже в еще более интересной и более общей дифференциальной форме, получить сразу, рассмотрев условия на входном зеркале, на которое слева падает входная волна, а справа – внутренняя волна, но та, которая отошла от входного зеркала некоторое время $\Delta t = 2nd/c$ назад, потребовавшееся волне, чтобы пройти путь $2d$, отразится от второго зеркала и получить за это время набег фаз:

$$a_0(t) = iT_1a_1 + R_1R_2a_0(t - \Delta t) e^{i\Delta\phi}. \quad (3.22)$$

В стационарном режиме, когда $a_0(t) = a_0(t - \Delta t)$ получается, естественно, тот же ответ, что и прежде. Рассмотрим сначала именно этот режим. Аналогично предыдущему, записывая условия для отраженной волны:

$$\begin{aligned} b_1 &= -R_1a_1 - iT_1R_2e^{i\Delta\phi}a_0 = -\frac{R_1 - R_2(R_1^2 + T_1^2)e^{i\Delta\phi}}{1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}}a_1 \\ &= -\frac{R_1 - R_2(1 - \mathcal{L}_1)e^{i\Delta\phi}}{1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}}a_1, \end{aligned} \quad (3.23)$$

а для прошедшей через резонатор волны:

$$b_2 = iT_2e^{i\Delta\phi/2}a_0 = -\frac{T_1T_2e^{i\Delta\phi/2}}{1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}}a_1. \quad (3.24)$$

В итоге мы можем записать все коэффициенты матрицы рассеяния резонатора ФП:

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}} \begin{pmatrix} R_2e^{i\Delta\phi}(1 - \mathcal{L}_1) - R_1 & -T_1T_2e^{i\Delta\phi/2} \\ -T_1T_2e^{i\Delta\phi/2} & R_1e^{i\Delta\phi}(1 - \mathcal{L}_2) - R_2 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Наибольший общий интерес представляют РФП с одинаковыми зеркалами без потерь:

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \sqrt{1 - T_{1,2}^2} = \sqrt{\mathcal{R}} = \sqrt{1 - \mathcal{T}}, \\ \mathcal{L}_1 &= \mathcal{L}_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

В этом случае выражения для мощностей отраженной, прошедшей и циркулирующей внутри волны имеют вид:

$$\begin{aligned} |b_1|^2 &= \frac{4\mathcal{R} \sin^2(\Delta\phi/2)}{(1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2(\Delta\phi/2)} |a_1|^2, \\ |b_2|^2 &= \frac{(1 - \mathcal{R})^2}{(1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2(\Delta\phi/2)} |a_1|^2, \\ |a_0|^2 &= \frac{1 - \mathcal{R}}{(1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2(\Delta\phi/2)} |a_1|^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Задание 1. *Получите аналогичные выражения для произвольных зеркал с потерями.*

Максимумы пропускания наблюдаются когда

$$\begin{aligned} \Delta\phi/2 &= \frac{\omega_m nd}{c} = m\pi, \\ f_m &= \frac{mc}{2nd}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Если в зеркалах и в среде, заполняющей резонатор, нет потерь, то на этих частотах знаменатель во всех выражениях минимален, отражения нет ($b_1 = 0$), а амплитуда прошедшей волны по модулю равна входной амплитуде. Чем меньше коэффициент отражения отличается от единицы, тем уже эти максимумы, превращающиеся в острые резонансные пики с лоренцевским профилем. Интерферометр превращается в резонатор.

При этом циркулирующая мощность внутри резонатора на резонансной частоте резко возрастает:

$$|a_0|^2 = \frac{1}{1 - \mathcal{R}} |a_1|^2. \quad (3.29)$$

При использовании хороших зеркал $1 - \mathcal{R} \ll 1$ и циркулирующая внутри мощность может быть на много порядков больше, чем входная.

Расстояние между соседними максимумами определяется соотношением:

$$f_{m+1} - f_m = \Delta f = \frac{c}{2nd}. \quad (3.30)$$

Как следует из этого соотношения, расстояния между максимумами пропускания резонатора не зависят от частоты, то есть спектр собственных частот идеального резонатора Фабри-Перо является эквидистантным.

Полоса пропускания резонатора Фабри-Перо $\Delta\lambda$ – это расстояние между максимумами пропускания, выраженными в длинах волн:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta f}{f} \lambda = \frac{\lambda^2}{2nd}, \quad (3.31)$$

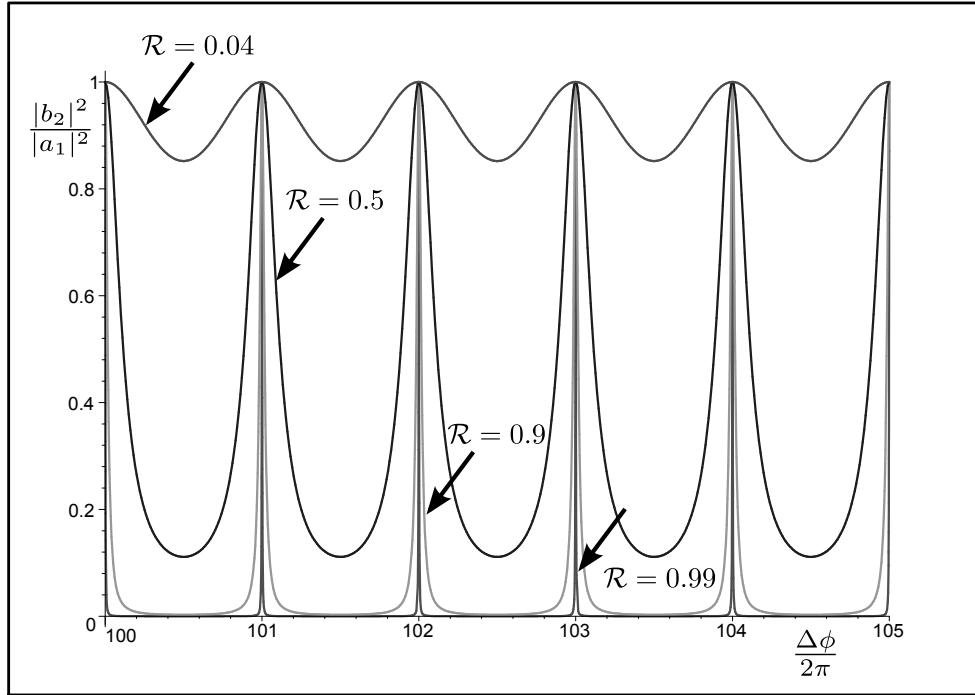


Рис. 3.3: Пики пропускания интерферометра Фабри-Перо при $\mathcal{R} = 0.04$ (стеклянная пластинка), $\mathcal{R} = 0.5$, $\mathcal{R} = 0.9$ и $\mathcal{R} = 0.99$.

Полная ширина максимумов пропускания по уровню $1/2$ определяется из условия (см. 3.27):

$$\sin \Delta\phi/2 = \frac{1 - \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}}, \quad (3.32)$$

что при условии узких пиков пропускания $\Delta\phi/2 - m\pi \ll 1$ приводит к соотношению:

$$\delta f_{1/2} = \frac{(1 - \mathcal{R})c}{2\pi\sqrt{\mathcal{R}}nd}, \quad (3.33)$$

Величина, определяемая отношением частотного расстояния между соседними однотипными модами (ОСД) к полосе пропускания отдельного резонанса

$$\frac{\Delta f}{\delta f_{1/2}} \equiv \mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{\mathcal{R}}}{1 - \mathcal{R}}, \quad (3.34)$$

называется резкостью интерферометра и характеризует разрешающую способность интерферометра Фабри-Перо как фильтра излучения. ОСД и полоса пропускания легко измеряются экспериментально и поэтому резкостью удобно характеризовать и резонаторы, не имеющие зеркал. При этом появляется возможность сравнивать любой резонатор с эквивалентным резонатором Фабри-Перо.

Понятие резкости резонатора играет большую роль в теории оптических резонаторов. Во-первых, в отличие от добротности, резкость не зависит от размера резонатора типа Фабри-Перо, но зависит только от отражательной способности зеркал. Следовательно, она характеризует качество зеркал. Во-вторых, резкость характеризует возрастание мощности волны в резонаторе по сравнению с мощностью волны накачки. Наконец, в-третьих, резкость присуща только принципиально многомодовым распределенным системам.

А добротность резонатора по определению является отношением частоты резонанса к его полуширине:

$$Q = \frac{f}{\delta f_{1/2}} = \mathcal{F} \frac{2nd}{\lambda}. \quad (3.35)$$

3.3 Резонатор с потерями. Согласование связи

Рассмотрим резонатор Фабри-Перо с потерями в среде и с неидеальными зеркалами. Потери в среде можно описать, вводя мнимую часть показателя преломления на данной частоте $\text{Im}(n) = \alpha/(2k_0)$, где α – коэффициент затухания мощности распространяющейся волны:

$$P(d) = |e^{ik_0nd}|^2 P(0) = e^{-\alpha d} P(0). \quad (3.36)$$

Удобно ввести коэффициент внутренних потерь на один проход

$$\mathcal{L}_0 = 2\alpha d. \quad (3.37)$$

Если потери малы, на резонансной частоте

$$e^{i\Delta\phi} = e^{-\alpha d} \simeq (1 - \alpha d) = 1 - \mathcal{L}_0/2. \quad (3.38)$$

Оказывается, что и в этом неидеальном случае можно добиться того, чтобы вся входная мощность попадала в резонатор на резонансной частоте и отражение бы отсутствовало.

Для того чтобы вся входная мощность попадала в резонатор, необходимо выполнение условия $b_1 = 0$ на резонансной частоте. Считая, что зеркала достаточно хорошие, и пропускание с поглощением много меньше единицы, разложим коэффициенты отражения

$$R_i = \sqrt{1 - \mathcal{T}_i - \mathcal{L}_i} \simeq 1 - \mathcal{T}_i/2 - \mathcal{L}_i/2. \quad (3.39)$$

Из выражения (3.23) следует, что для обращения в нуль b_1 достаточно потребовать при резонансе равенства нулю числителя дроби:

$$\begin{aligned} R_1 - R_2(R_1^2 + T_1^2)e^{-\alpha d} &\simeq -\mathcal{T}_1/2 - \mathcal{L}_1/2 + \mathcal{T}_2/2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0/2 = 0 \\ \mathcal{T}_1 &= \mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Мы пренебрегли здесь членами второго порядка малости. Полученное выражение имеет очень простой физический смысл: \mathcal{T}_1 – определяет связь резонатора с волной накачки и потери связи, а все остальные члены описывают другие виды потерь. Так, \mathcal{T}_2 можно интерпретировать как потери рассеяния резонатора на втором зеркале, \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 – поглощение в зеркалах, \mathcal{L}_0 – внутренние (собственные) потери резонатора. Таким образом, оптимальная связь с резонатором обеспечивается условием равенства потерь связи сумме всех остальных видов потерь. Легко показать, что именно при таком пропускании входного зеркала, амплитуда и мощность, циркулирующая внутри резонатора, максимальна. Действительно, найдем, при каком значении \mathcal{T}_1 достигается максимум a_0 на резонансной частоте (3.21):

$$a_0 = \frac{i\mathcal{T}_1}{1 - R_1 R_2 e^{i\Delta\phi}} a_1 \simeq \frac{i2\sqrt{\mathcal{T}_1}}{\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_0} a_1. \quad (3.41)$$

Дифференцируя по \mathcal{T}_1 и приравнявая производную нулю, получаем то же самое равенство, что и ранее. При этом

$$|a_{0max}|^2 = \frac{1}{\mathcal{T}_1} |a_1|^2. \quad (3.42)$$

3.3.1 Укороченное уравнение для поля в резонаторе

Вернемся к выведенному ранее разностному уравнению (3.22). Используя приближение $a(t - \frac{2nd}{c}) \simeq a(t) - \frac{2nd}{c} \dot{a}(t)$, получим дифференциальное уравнение:

$$\dot{a}_0 + a_0 \frac{c}{2nd} (1 - R_1 R_2 e^{i\Delta\phi}) = i \frac{\mathcal{T}_1 c}{2nd} a_1, \quad (3.43)$$

полагая, как и ранее $R_i \simeq 1 - \mathcal{T}_i/2 - \mathcal{L}_i/2$, $e^{i\Delta\phi} \simeq 1 + i2n\Delta k_0 d - \alpha d$ и, пренебрегая членами второго порядка малости, можно получить дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 + a_0(\delta_\Sigma - i\Delta\omega) &= i \frac{\mathcal{T}_1 c}{2nd} a_1, \\ \delta_\Sigma &= \delta_0 + \delta_{1s} + \delta_{2s} + \delta_{1a} + \delta_{2a}, \\ \delta_0 &= \frac{\alpha c}{2n}, \quad \delta_{is} = \frac{\mathcal{T}_i c}{4nd}, \quad \delta_{ia} = \frac{\mathcal{L}_i c}{4nd}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Мы нашли укороченное уравнение, совершенно аналогичное тому, которое было выведено в первой главе для модели колебательного контура, связанного с длинной линией. Первый декремент δ_0 описывает внутренние потери в резонаторе. Ему соответствует собственная добротность:

$$Q_0 = \frac{\omega}{2\delta_0} = \frac{2\pi n}{\alpha \lambda}. \quad (3.45)$$

В случае согласованного резонатора δ_{1s} равна сумме всех остальных видов потерь, и тогда:

$$Q_\Sigma = \frac{\omega}{4\delta_{1s}} = \frac{\pi}{\mathcal{T}_1} \frac{2dn}{\lambda} \simeq \mathcal{F} \frac{2dn}{\lambda}, \quad (3.46)$$

что согласуется с выражением, полученным ранее.

3.3.2 Сканирование длины резонатора

Собственные частоты и соответствующие им длины волн удовлетворяют простому условию резонанса:

$$m \frac{\lambda_m}{2} = nd, \quad (3.47)$$

то есть на оптической длине резонатора укладывается целое число полуволн. При этом в резонаторе образуется стоячая волна и на поверхности зеркал приходятся узлы этой волны.

При медленном (по сравнению со временем звона) изменении длины Фабри-Перо резонатора, например, посредством продольного перемещения одного зеркала, приклеенного к пьезоэлектрическому пакету, изменяется и резонансная длина волны в пропорции $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta d}{d}$ и, соответственно, смещается (сдвигается) его частота. Изменяя, таким образом, резонансную длину волны резонатора лазера, можно тем самым менять длину волны одночастотного лазерного излучения. Такой способ сканирования широко применяется, когда требуется прецизионная перестройка длины волны в не слишком больших пределах. Перестройка волны одночастотного лазера имеет смысл лишь в пределах свободного спектрального диапазона, в противном случае, излучение лазера будет перескакивать на моды другого порядка, соответствующие другим номерам m .

$$\begin{aligned} m(\lambda + \Delta\lambda) &= (m + 1)\lambda, \\ \Delta\lambda &\leq \frac{\lambda^2}{2nd}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

что с использованием полученной пропорции дает:

$$\Delta d \leq \frac{d}{m} = \frac{\lambda}{2n}, \quad (3.49)$$

то есть максимальная допустимая перестройка лазера достигается при изменении его длины на половину длины волны в среде – доли микрона. Такой порядок перемещения легко обеспечивают пьезопакеты. Чем короче резонатор, тем большую перестройку длины волны лазера обеспечивает такое изменение длины резонатора.

3.4 Гауссовы пучки

Поскольку резонатор Фабри-Перо является резонатором, не ограниченным боковыми стенками, поле распространяющихся в нем мод должно каким-то образом спадать в поперечном направлении, чтобы утечка энергии в этом направлении была мала. В декартовой или цилиндрической системе координат можно выбрать скалярный потенциал, соответствующий z компоненте поля. Этот потенциал будет удовлетворять скалярному уравнению Гельмгольца.

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0. \quad (3.50)$$

Будем искать решение в параксиальном приближении $\psi = u(x, y, z)e^{ikz}$, где $u(x, y, z)$ – медленно в масштабе длины волны изменяющаяся функция. Подставляя это решение в уравнение Гельмгольца и пренебрегая членом $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, как в методе медленно меняющихся амплитуд, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i2k \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (3.51)$$

Решением уравнения Гельмгольца является сферическая волна e^{ikr}/r . В параксиальном приближении для точек, прилежащих к оси z ($x^2 + y^2 \ll z^2$), r можно разложить в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \simeq z + \frac{x^2 + y^2}{2z}, \\ \frac{e^{ikr}}{r} &\simeq e^{ikz} \frac{1}{z} e^{i\frac{k(x^2+y^2)}{2z}} = e^{ikz} u(x, y, z). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Если $\psi(x, y, z)$ выбрать в качестве потенциала Дебая с векторной функцией \mathbf{i}_z или, что тоже самое, выбрать векторный потенциал в виде:

$$\mathbf{A} = u(x, y, z)e^{ikz}\mathbf{i}_x, \quad (3.53)$$

можно получить выражения для электромагнитных полей:

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{H} &= \nabla \times (\mathbf{i}_x \psi) = ik \left[u \mathbf{i}_y + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{i}_z \right], \\ \mathbf{E} &= i\omega \left[u \mathbf{i}_x + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i}_z \right], \end{aligned} \quad (3.54)$$

где мы, в соответствии с параксиальным приближением пренебрегли слагаемыми $\frac{\partial u}{\partial z}$ по сравнению с ku .

Можно проверить, что $u(x, y, z)$ в параксиальном приближении удовлетворяет полученному ранее укороченному уравнению, также как и любая другая функция вида $u(x, y, z + z_0)$. Для мнимого $z_0 = -ib$ получается функция, описывающая распространение гауссового пучка.

$$\begin{aligned} u_{00} &= i \sqrt{\frac{kb}{\pi}} \left(\frac{1}{z - ib} \right) e^{ik \frac{x^2+y^2}{2(z-ib)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}w} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2} + \frac{ik(x^2+y^2)}{2K} - i\phi} \\ w^2(z) &= \frac{2b}{k} \left(1 + \frac{z^2}{b^2} \right), \quad K(z) = \frac{z^2 + b^2}{z}, \quad \tan \phi = \frac{z}{b} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Здесь нормировочная константа выбрана так, чтобы

$$\iint |u_{00}|^2 dx dy = 1. \quad (3.56)$$

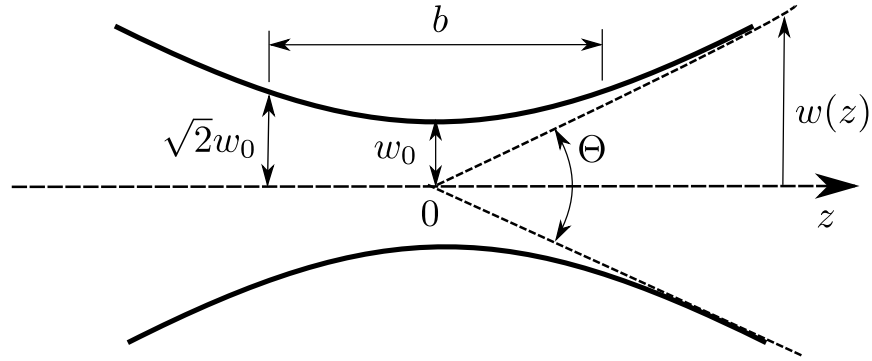


Рис. 3.4: Параметры гауссового пучка

Величина $K(z)$ описывает радиус кривизны фронта пучка, который распространяется вдоль оси z . Величина $w(z)$ показывает радиус пучка. Минимальный радиус при $z = 0$, равный $w_0 = \sqrt{2b/k}$ называется радиусом перетяжки. Величина $b = kw_0^2/2 = \pi w_0^2/\lambda$ называется конфокальным параметром. Параметры пучка удобно переписать через радиус перетяжки w_0 :

$$\begin{aligned} w^2(z) &= w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \\ K(z) &= \frac{z^2 + (\pi w_0^2/\lambda)^2}{z} \\ \tan \phi &= \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Гауссов пучок с радиусом перетяжки w_0 (рис. 3.4) асимптотически расширяется в виде конуса с углом раскрыва

$$\Theta \simeq \frac{w}{z} \simeq \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.58)$$

3.5 Условия устойчивости РФП

Рассмотрим резонатор Фабри-Перо, образованный парой сферических зеркал. Пусть в нем образовалась стоячая волна, имеющая вид гауссового пучка с перетяжкой при $z = 0$, а отражающие поверхности зеркал с радиусами кривизны K_1 и K_2 пересекают ось z в точках $z = z_1$ и $z = z_2$. Понятно, что такая мода будет устойчива, если фаза волны на поверхности зеркал одинакова, что достигается, если радиус кривизны фазовых фронтов на поверхности зеркал совпадает с радиусом кривизны самих зеркал.

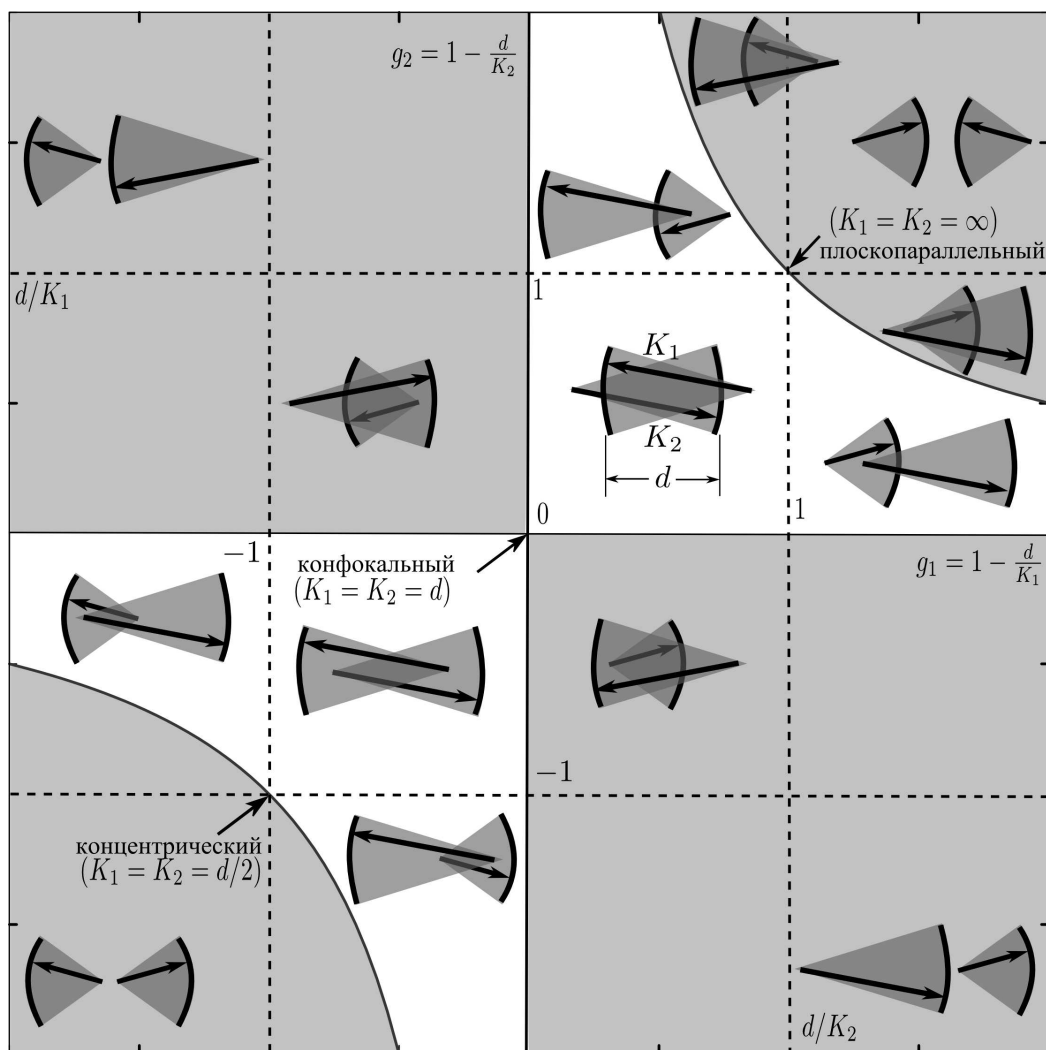


Рис. 3.5: Диаграмма устойчивости резонаторов типа Фабри-Перо

Запишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{z_2^2 + b^2}{z_2} &= K_2, & \frac{z_1^2 + b^2}{z_1} &= -K_1, \\ z_2 - z_1 &= d. \end{aligned} \quad (3.59)$$

После цепочки преобразований выразим b^2 :

$$b^2 = \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2} = -z_1(K_1 + z_1) = \frac{d(K_1 - d)(K_2 - d)(K_1 + K_2 - d)}{(K_1 + K_2 - 2d)^2}. \quad (3.60)$$

Если ввести обозначения, $g_1 = 1 - \frac{d}{K_1}$ и $g_2 = 1 - \frac{d}{K_2}$, то радиусы пятен на поверхности зеркал определяются следующими выражениями:

$$w_1 = \sqrt{\frac{\lambda d}{\pi}} \left[\frac{g_1}{g_2} \frac{1}{1 - g_1 g_2} \right]^{1/4}, \quad w_2 = \sqrt{\frac{\lambda d}{\pi}} \left[\frac{g_2}{g_1} \frac{1}{1 - g_1 g_2} \right]^{1/4}. \quad (3.61)$$

Задание 2. Выведите выражения для b^2 , w_1 и w_2 .

Эти величины действительны только если выполняются условия:

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1. \quad (3.62)$$

Эти условия графически изображаются в виде классической диаграммы Когельника-Бойда [2] (рис. 3.5). Устойчивые моды возможны только в незаштрихованных областях.

Можно указать и более простое эквивалентное правило определения устойчивости, не требующее обращения к диаграмме. Если каждое из двух зеркал резонатора представить в виде горизонтального отрезка, соединяющего центр кривизны зеркала $O_{1,2}$ и точку на поверхности $P_{1,2}$, то устойчивыми являются лишь те конфигурации, для которых два получающихся отрезка накладываются с пересечением, но при этом ни один из отрезков не лежит внутри другого. Иначе говоря, в последовательностях точек типа $O_1 P_2 P_1 P_2$ нижние индексы должны чередоваться (см. примеры конфигураций на рисунке).

3.6 Астигматические и обобщенные гауссовы пучки

Основная мода резонатора Фабри-Перо со сферическими зеркалами представляет собой осесимметричный гауссов пучок, однако, это не единственное решение параксиального уравнения.

Говоря о простых гауссовых пучках, обычно имеют в виду симметричные пучки, описываемые только поляризацией, положением и радиусом перетяжки. Между тем, пучок может иметь эллиптическое сечение и разное положение фокусов z_1 и z_2 по разным осям. Такой пучок описывается выражением:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{u_0}{\sqrt{q_1 q_2}} \exp \left[\frac{ikx^2}{2q_1} + \frac{iky^2}{2q_2} + ikz + i\phi \right], \\ q_1 &= z - z_1 - ib_1, \quad q_2 = z - z_2 - ib_2, \\ w_1(z) &= \sqrt{\frac{(z - z_1)^2 + b_1^2}{kb_1}}, \quad w_2(z) = \sqrt{\frac{(z - z_2)^2 + b_2^2}{kb_2}}, \\ R_1(z) &= z - z_1 + \frac{b_1^2}{z - z_1}, \quad R_2(z) = z - z_2 + \frac{b_2^2}{z - z_2}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Волновой фронт астигматичного пучка вдали от перетяжек имеет форму астигматичного параболоида, в перетяжках – цилиндрическую форму, а между ними – седловидную форму.

Другие решения параксиального уравнения описывают гауссовы пучки более высокого порядка. Если в системе каким-либо образом нарушена осевая симметрия, возможны решения, называемые гаусс-эрмитовыми пучками:

$$u_{p,m}(x, y, z) = \frac{u_0}{\sqrt{((z - z_1)^2 + b_1^2)((z - z_2)^2 + b_2^2)}} H_p \left(\frac{x}{w_1} \right) H_m \left(\frac{y}{w_2} \right) \times \exp \left[\frac{ikx^2}{2q_1} + \frac{iky^2}{2q_2} - i \left(p + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{z - z_1}{b_1} - i \left(m + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{z - z_2}{b_2} + ikz + i\phi \right]. \quad (3.64)$$

Параметры q_1 , q_2 , w_1 и w_2 определяются также как и для простого астигматичного пучка (3.64), а H_ν – полиномы Эрмита.

В осесимметричном случае возможны лаггерр-гауссовы пучки, которые в цилиндрических координатах (r, ϕ, z) :

$$u(\rho, \phi, 0) = \frac{u_0}{\sqrt{b^2 + z^2}} \left(\frac{kbr^2}{b^2 + z^2} \right)^{|m|/2} L_m^p \left(\frac{kbr^2}{b^2 + z^2} \right) \times \exp \left[\frac{kbr^2}{2(b^2 + z^2)} + \frac{ikzr^2}{2(b^2 + z^2)} - i(|m| + 2p + 1) \operatorname{arctg} \frac{z}{b} + ikz + im\phi + i\psi \right], \quad (3.65)$$

где $L_2^m(x)$ – полиномы Лаггерра. Подробнее об обобщенных гауссовых пучках см., например, [3].

3.7 Многослойные покрытия

Применявшиеся в первых интерферометрах и резонаторах Фабри-Перо, серебряные зеркала не годятся для создания высокодобротных резонаторов, поскольку металлические пленки имеют большие оптические потери (10^6 см^{-1}), а коэффициент отражения ≤ 0.96 недостаточен для большинства применений. Современная технология позволяет получать диэлектрические многослойные зеркала с очень малыми потерями и большими коэффициентами отражения. Такие же многослойные зеркала, часто называемые брэгговскими, применяются и в монолитных микрорезонаторах типа Фабри-Перо.

Электрическое и магнитное поле в плоской бегущей волне (для определенности

выберем поляризацию вдоль оси x) можно представить в виде:

$$E_x = E_{0+}e^{ikz} + E_{0-}e^{-ikz} = E_+(z) + E_-(z), \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} H_y &= H_{0+}e^{ikz} + H_{0-}e^{-ikz} = \frac{1}{\eta}[E_{0+}e^{ikz} - E_{0-}e^{-ikz}] \\ &= \frac{1}{\eta}[E_+(z) - E_-(z)], \\ \eta &= \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} = \frac{1}{n}Z_0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

В такой записи прямая и обратная электромагнитные волны эквивалентны прямой и обратной волне в длинной линии, описываемой телеграфными уравнениями (Глава 2). При этом электрическое поле соответствует напряжению волны в длинной линии, а магнитное поле – току. Параметр η соответствует волновому сопротивлению длинной линии. Как и в длинных линиях удобно ввести понятия коэффициента отражения поля Γ и импеданса Z [1]:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{E_-(z)}{E_+(z)} = \frac{E_{0-}}{E_{0+}}e^{-2ikz} = \Gamma_0e^{-2ikz}, \\ Z(z) &= \frac{E(z)}{H(z)} = \eta \frac{E_+(z) + E_-(z)}{E_+(z) - E_-(z)} = \eta \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = \eta \frac{1 + \Gamma(0)e^{-2ikz}}{1 - \Gamma(0)e^{-2ikz}}, \\ \Gamma(z) &= \frac{Z(z) - \eta}{Z(z) + \eta}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Введенные параметры Γ и Z позволяют легко рассчитывать параметры любой многослойной системы. Так как тангенциальные компоненты электрических и магнитных полей непрерывны на границах, то же справедливо и для импеданса Z . С другой стороны, Γ на границах испытывает скачок, но в однородной среде только меняет фазу

$$\Gamma(z + d) = \Gamma(z)e^{-2iknd} = \Gamma(z)e^{-i\phi}. \quad (3.69)$$

Пусть многослойное покрытие нанесено между основной с показателем преломления n_s и другой средой с показателем преломления n_0 (например, на границе воздуха с $n_0 \simeq 1$ и стеклянного зеркала) (рис. 3.7). Рассматривать слои следует с самой последней границы слоя со средой s , где есть только прошедшая волна E_+ , а $E_- = 0$ и поэтому $Z_s = \eta_s$.

Таким образом, начиная с самого правого слоя, где в субстрате $\Gamma_s = 0$ и $Z_s = \eta_s$, двигаясь слой за слоем, справа налево, пересчитывая на границе справа коэффициент отражения в импеданс и затем на границе слева импеданс в коэффициент отражения, мы можем рассчитать коэффициент отражения многослойного зеркала Γ_{out} . Можно связать и непосредственно коэффициенты отражения справа Γ_r и слева Γ_l от любой границы раздела:

$$\Gamma_l = \frac{\Gamma_{rl} + \Gamma_r}{1 + \Gamma_r \Gamma_{rl}}, \quad (3.70)$$

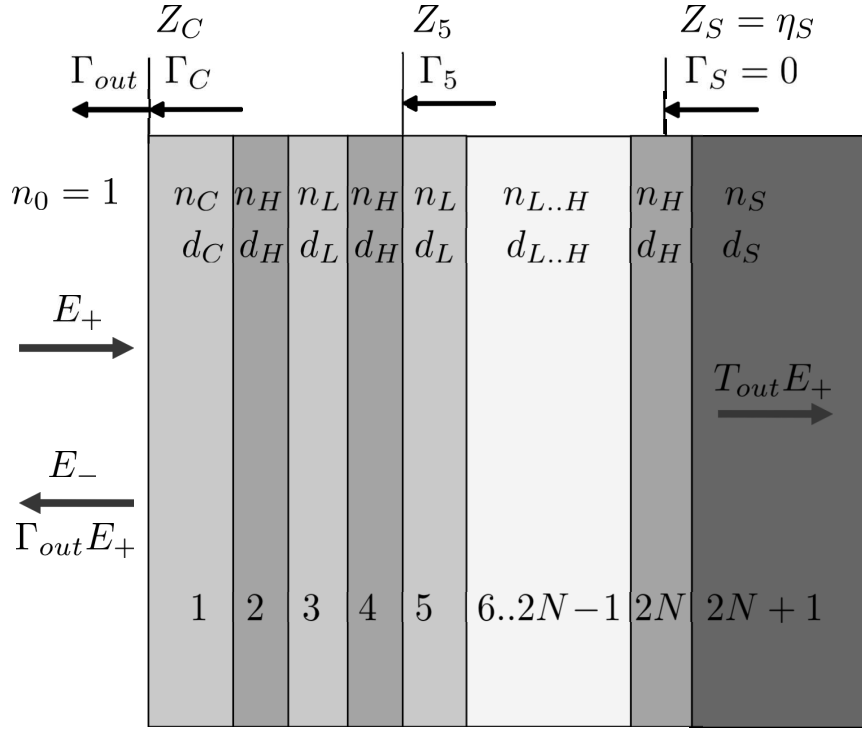


Рис. 3.6: Схема многослойного диэлектрического покрытия.

где

$$\Gamma_{rl} = \frac{\eta_r - \eta_l}{\eta_r + \eta_l} = \frac{n_l - n_r}{n_l + n_r} \quad (3.71)$$

определяет коэффициент отражения по амплитуде на границе раздела двух сред. В частности, он определяет коэффициент отражения от диэлектрической поверхности при нормальном падении при $n_r = n_0$. Отметим, что если $n_l < n_r$, коэффициент отражения отрицателен.

Таким образом, раскручивая слои в обратном порядке, чередуя условия для Γ и Z , можно рассчитать произвольное многослойное покрытие.

Рассмотрим простейшую систему слоев, наиболее часто применяемую для создания диэлектрических зеркал – систему состоящую из $2N$ чередующихся четвертьволновых слоев (слоев, оптическая толщина которых равна четверти длины волны в среде) с высоким и низким показателем преломления с $n_{2j} = n_H$, $n_{2j+1} = n_L$, $n_j d_j = \lambda/4$, $\phi_j = 2kn_j d_j = \pi$. Этот вид покрытия обеспечивает максимальный коэффициент отражения при заданном числе слоев. Для четвертьволнового слоя

$$\begin{aligned} \Gamma_i \left(z + \frac{\lambda}{4n} \right) &= -\Gamma_i(z), \\ Z_{i+1} &= \eta \frac{1 + \Gamma_i \left(\frac{\lambda}{4n} \right)}{1 - \Gamma_i \left(\frac{\lambda}{4n} \right)} = \eta \frac{1 - \Gamma_i}{1 + \Gamma_i} = \frac{\eta^2}{Z_i}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Это свойство четвертьволнового слоя преобразовывать импеданс (в теории длинных линий четвертьволновые отрезки называются трансформатором) позволяет построить простые рекуррентные соотношения между импедансами слоев.

$$Z_2 = \frac{\eta_H^2}{Z_3} = \frac{\eta_L^2}{\eta_H^2} Z_4 = \frac{\eta_L^{2N-2}}{\eta_H^{2N-2}} Z_{2N} = \frac{\eta_H^{2N}}{Z_{2N+1} \eta_L^{2N-2}} = \frac{\eta_H^{2N}}{\eta_S \eta_L^{2N-2}}. \quad (3.73)$$

Здесь Z_2 – импеданс на границе покровного слоя с первым регулярным слоем, а $Z_{2N+1} = Z_S$ – выходной импеданс на границе многослойного покрытия с основой. Поскольку отраженной волны на выходе нет, $Z_{2N+1} = \eta_S$. Окончательно получаем коэффициент отражения на входной поверхности:

$$\Gamma_1 = \frac{Z_1 - \eta_a}{Z_1 + \eta_a} = \frac{\left(\frac{\eta_L}{\eta_H}\right)^{2N} \eta_s - \eta_a}{\left(\frac{\eta_L}{\eta_H}\right)^{2N} \eta_s + \eta_a} = \frac{1 - \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^{2N} n_S}{1 + \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^{2N} n_S}. \quad (3.74)$$

Для двух принципиальных случаев 1) когда внешний покровный слой $n_C = n_L$ является тоже четвертьволновым – выходной слой с низким показателем преломления, и без покровного слоя ($d_C = 0$, выходной слой с высоким показателем преломления) получаем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{out,L} &= \frac{1 - \varepsilon n_S}{1 + \varepsilon n_S}, \\ \Gamma_{out,H} &= -\frac{1 - \varepsilon n_S / n_L^2}{1 + \varepsilon n_S / n_L^2}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

где $\varepsilon = (n_L/n_H)^{2N}$. Существенно, что когда $N \rightarrow \infty$ и $n_L/n_H < 1$ оба случая дают $|\Gamma_{out}| = 1$ но с разными знаками.

Распределенные отражающие структуры в интегральном исполнении, аналогичные по свойствам многослойным покрытиям, могут играть роль распределенных микрорезонаторов. При этом область в среде, в которой образуется резонансное поле, протяженностью в целое число полуволн и заключенное между распределенными отражателями может быть очень короткой. В отличие от обычных резонаторов Фабри-Перо, добротность связи таких распределенных структур зависит от длины не линейно, а экспоненциально. Эти интересные микрорезонаторы выходят, однако, за рамки рассмотрения этой книги, поскольку их добротность, реально продемонстрированная в экспериментах, все же невелика.

Задание 3. *Получите выражение для добротности резонатора с распределенными отражателями, пренебрегая собственными потерями.*

Литература

- [1] Х. Хаус. *Волны и поля в оптоэлектронике*. М.: Мир, 1988.
- [2] Н. Kogelnik and Т. Li. Laser beams and resonators. *Applied Optics*, 5:1550–1567, 1966.
- [3] С. Солимено, Б. Крозиньяни, and П. Ди Порто. *Дифракция и волноводное распространение оптического излучения*. М.: Мир, 1989.