Глава 2

Электродинамика мод резонатора

2.1 Уравнения Максвелла в среде

В основе теории открытых резонаторов лежат уравнения Максвелла, которые в системе СИ при отсутствии токов и зарядов имеют вид:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля; $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ – соответственно, электрическая и магнитная индукция; $\mathbf{J}$. В изотропной среде $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ и $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$, где μ и ϵ – магнитная и диэлектрическая относительные проницаемости среды, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$Н/А^2 и $\epsilon_0 = 1/(c^2\mu_0) \simeq 8.854 \times 10^{-12}$ Ф/м, соответственно, электрическая и магнитная константы, $c = 299792458$ м/с (в точности по определению системы единиц СИ) – скорость света в вакууме.

В общем случае анизотропной среды проницаемости $\hat{\mu}$ и $\hat{\epsilon}$ – тензоры:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon_0 \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \\
\mathbf{B} &= \mu_0 \hat{\mu} \mathbf{H}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

В немагнитной среде $\mu = 1$. Также вводятся векторы электрической поляризации и намагничения, определяемые соотношениями (обратите внимания на исторически сложившуюся несимметричность их определения):

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\
\mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \\
\mathbf{P} &= \epsilon_0 \hat{\chi}_e \mathbf{E}, \\
\mathbf{M} &= \hat{\chi}_m \mathbf{H}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Взяв дивергенцию от первого и второго уравнения (2.1), и учитывая, что дивергенция ротора равна нулю, легко видеть, что третье и четвертое уравнения Максвелла при отсутствии источников являются избыточными, поскольку удовлетворяются автоматически (с точностью до не зависящих от времени компонентов).

На врезках приведены основные свойства векторных операторов, фигурирующих в уравнениях Максвелла, и некоторые полезные соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

В декартовой системе координат оператор набла имеет вид:

$$\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{2.4}$$

В недекартовых ортогональных координатах (ξ, η, ζ):

$$\begin{aligned}
\nabla u &= \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathbf{i}_\xi + \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathbf{i}_\eta + \frac{1}{h_\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathbf{i}_\zeta, \qquad (2.5)\\
\nabla \cdot \mathbf{U} &= \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left[\frac{\partial(h_\eta h_\zeta U_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(h_\xi h_\zeta U_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_\xi h_\eta U_\zeta)}{\partial \zeta}\right],\\
\nabla \times \mathbf{U} &= \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\begin{vmatrix} h_\xi \mathbf{i}_\xi & h_\eta \mathbf{i}_\eta & h_\zeta \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ h_\xi U_\xi & h_\eta U_\eta & h_\zeta U_\zeta \end{vmatrix}\\
&= \left[\frac{\partial(h_\zeta U_\zeta)}{h_\eta h_\zeta \partial \eta} - \frac{\partial(h_\eta U_\eta)}{h_\eta h_\zeta \partial \zeta}\right]\mathbf{i}_\xi + \left[\frac{\partial(h_\xi U_\xi)}{h_\xi h_\zeta \partial \zeta} - \frac{\partial(h_\zeta U_\zeta)}{h_\xi h_\zeta \partial \xi}\right]\mathbf{i}_\eta\\
&+ \left[\frac{\partial(h_\eta U_\eta)}{h_\xi h_\eta \partial \xi} - \frac{\partial(h_\xi U_\xi)}{h_\xi h_\eta \partial \eta}\right]\mathbf{i}_\zeta,\\
(\mathbf{V}\cdot\nabla)u &\equiv \frac{V_\xi}{h_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathbf{i}_\xi + \frac{V_\eta}{h_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathbf{i}_\eta + \frac{V_\zeta}{h_\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathbf{i}_\zeta,\\
\nabla^2 u &= \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\times\\
&\times\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)\right].
\end{aligned}$$

Кроме декартовой системы координат далее будем использовать цилиндрическую: $(h_\rho = h_z = 1,\ h_\phi = \rho)$ и сферическую $(h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\phi = r\sin\theta)$ системы.

$$h_\chi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \chi}\right)^2} \tag{2.6}$$

– параметры Ламе ортогональной системы координат.

Часто приходится пользоваться соотношениями, определяющими двойные векторные операции:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{grad} u &\equiv \nabla\cdot(\nabla u) \equiv \nabla^2 u,\\
\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U} &\equiv \nabla(\nabla\cdot\mathbf{U}) = \nabla^2\mathbf{U} + \nabla\times(\nabla\times\mathbf{U}),\\
\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U} &\equiv \nabla\times(\nabla\times\mathbf{U}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{U}) - \nabla^2\mathbf{U},\\
\operatorname{rot}\operatorname{grad} u &\equiv \nabla\times(\nabla u) = 0,\\
\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{U} &\equiv \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{U}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Выпишем также полезные соотношения для векторных операций от произведения функций:

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot(u\mathbf{V}) = u\nabla\cdot\mathbf{V} + (\nabla u)\cdot\mathbf{V},\\
&\nabla\times(u\mathbf{V}) = u\nabla\times\mathbf{V} + (\nabla u)\times\mathbf{V},\\
&\nabla\cdot(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = \mathbf{V}\cdot\nabla\times\mathbf{U} - \mathbf{U}\cdot\nabla\times\mathbf{V},\\
&\nabla(\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}) = (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{U} + \mathbf{U}\times\nabla\times\mathbf{V} + \mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{U},\\
&\nabla\times(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{U} - (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \mathbf{U}(\nabla\cdot\mathbf{V}) - \mathbf{V}(\nabla\cdot\mathbf{U}).
\end{aligned}$$

Задание 1. *Выведите выражения для двойных операций* $\nabla\times\nabla\times\mathbf{U}$ *и* $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{U})$ *в произвольной криволинейной системе координат.*

2.2 Волновое уравнение

В изотропных средах при отсутствии сторонних зарядов и токов и выборе временной зависимости поля в виде $e^{-i\omega t}$ уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= -\frac{i}{\mu_0\mu\omega}\nabla\times\mathbf{E},\\
\mathbf{E} &= \frac{i}{\epsilon_0\epsilon\omega}\nabla\times\mathbf{H}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Действуя оператором ротор на эти уравнения, с учетом третьего и четвертого уравнений в (2.1), получаем однородные векторные уравнения Гельмгольца для полей:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} &= 0,\\
\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

здесь

$$k^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} = \epsilon\mu k_0^2, \tag{2.11}$$

k_0 – постоянная распространения в вакууме.

При комплексной записи полей в виде $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ подразумевается, что переход к реальным полям производится следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r},t)\right]. \tag{2.12}$$

2.3 Теорема Пойнтинга. Мощность и энергия поля.

Если первое уравнение в системе Максвелла (2.1) скалярно умножить на $\mathbf{H}$, а третье на $-\mathbf{E}$ и сложить, то получим, согласно выписанному ранее представлению дивергенции векторного произведения:

$$\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) \equiv \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon\epsilon_0}{2}\mathbf{E^2} + \frac{\mu\mu_0}{2}\mathbf{H^2}\right]. \tag{2.13}$$

Мы доказали теорему Пойнтинга. Слагаемые

$$\begin{aligned} w_E &= \frac{\epsilon\epsilon_0}{2}\mathbf{E}^2, \\ w_H &= \frac{\mu\mu_0}{2}\mathbf{H}^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

описывает плотность электрической и магнитной энергии. Таким образом, в правой части равенства стоит изменение полной плотности энергии во времени. Вектор под дивергенцией – вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}, \tag{2.15}$$

который описывает поток мощности электромагнитной энергии, переносимой в единицу времени через единицу площади. Его интеграл по сечению распространяющейся волны равен мощности:

$$\mathcal{P} = \int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{s}. \tag{2.16}$$

Проинтегрировав это уравнение по объему и, воспользовавшись теоремой о дивергенции, получим:

$$\oint(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t}\int\left[\frac{\epsilon_0\epsilon}{2}\mathbf{E^2} + \frac{\mu_0\mu}{2}\mathbf{H^2}\right]dv = 0. \tag{2.17}$$

Это фактически закон сохранения энергии, показывающий, что при отсутствии внутренних потерь изменение энергии в объеме в единицу времени происходит только за счет мощности, переносимой через границу объема.

При вычислении мощности и энергии следует помнить о соглашении для комплексной записи полей (2.12). Из указанного соглашения следует, что усредненные за период плотности энергии электрического и магнитного поля равны, соответственно:

$$\begin{aligned}\langle w_E\rangle &= \frac{\epsilon\epsilon_0|\tilde{\mathbf{E}}|^2}{4}\\ \langle w_H\rangle &= \frac{\mu\mu_0|\tilde{\mathbf{H}}|^2}{4}\\ S &= \frac{1}{4}\left[\tilde{\mathbf{E}}^*\times\tilde{\mathbf{H}}+\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}^*\right]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

В высокодобротных резонаторах, когда относительные потери за период малы и $\langle w_E\rangle \simeq \langle w_H\rangle$, полная плотность энергии

$$\begin{aligned} w &= \langle w_E\rangle + \langle w_H\rangle \simeq \frac{\epsilon\epsilon_0|\tilde{\mathbf{E}}|^2}{2} \simeq \frac{\mu\mu_0|\tilde{\mathbf{H}}|^2}{2},\\ \mathcal{E} &= \int_V w(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где $\mathcal{E}$ – энергия электромагнитного поля, заключенная в объеме V. В свободно распространяющейся поперечной электромагнитной (TEM) волне, например, в лазерном пучке вдали от фокуса:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\simeq \frac{\mathbf{k}}{2\omega\mu\mu_0}|\tilde{\mathbf{E}}|^2 = \mathbf{i}_\mathbf{k}\frac{c}{n}\frac{\epsilon\epsilon_0|\tilde{\mathbf{E}}|^2}{2}\\ &\simeq \frac{\mathbf{k}}{2\omega\epsilon\epsilon_0}|\tilde{\mathbf{H}}|^2 = \mathbf{i}_\mathbf{k}\frac{c}{n}\frac{\mu\mu_0|\tilde{\mathbf{H}}|^2}{2} = \mathbf{i}_\mathbf{k}\frac{c}{n}w. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Этими же выражениями можно пользоваться и для направляющих волноводов, для которых справедливо соотношение для мощности:

$$\mathcal{P} = \frac{c\beta\epsilon_0}{2k_0}\int|\tilde{\mathbf{E}}|^2 ds, \tag{2.21}$$

где $\beta \sim nk_0$ – продольная постоянная распространения. В оптике абсолютное значение вектора имеет смысл интенсивности волны $I = |\mathbf{S}|$.

Простейшей формой распространяющихся электромагнитных колебаний является плоская волна. Пусть для определенности она распространяется вдоль оси z и поляризована вдоль оси x:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= E_0 e^{ikz}\mathbf{i}_x\\ \tilde{\mathbf{H}} &= -\frac{i}{\mu\mu_0\omega}\frac{\partial\tilde{E}_x}{\partial z}\mathbf{i}_y = E_0\frac{\sqrt{\epsilon\epsilon_0}}{\sqrt{\mu\mu_0}}e^{ikz}\mathbf{i}_y\\ \mathbf{S} &= \frac{c}{n}\frac{\epsilon\epsilon_0}{2}\tilde{E}_0^2\mathbf{i}_z. \end{aligned} \tag{2.22}$$

В дальнейшем мы обычно рассматриваем поля в комплексной форме в виде частотных Фурье компонент, а знак тильды для краткости опускаем.

В оптике немагнитных материалов свойства среды описываются показателем преломления $n = \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\epsilon}$. В среде с собственными потерями показатель преломления и проницаемость являются комплексными величинами, с которыми коэффициент затухания мощности плоской волны связан соотношением

$$\alpha = 2\mathrm{Im}(n)k_0. \tag{2.23}$$

Поскольку в большинстве рассматриваемых случаев собственные оптические потери малы, при решении электродинамических задач обычно удобно считать показатель преломления действительным, учитывая собственные потери потом, в числе других видов потерь.

Для нахождения собственных полей в резонаторе требуется найти решения уравнения (2.10), удовлетворяющие граничным условиям. Граничные условия получаются из уравнений Максвелла предельным переходом.

$$\begin{aligned} &(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = 0, \\ &(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \end{aligned} \tag{2.24}$$

где $\mathbf{n}$ – вектор, нормали к поверхности. Иначе, обозначая индексом τ тангенциальные проекции поля, а индексом n – нормальные

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\tau 1} = \mathbf{E}_{\tau 2}, \quad \mathbf{H}_{\tau 1} = \mathbf{H}_{\tau 2}, \\ \mathbf{D}_{n1} = \mathbf{D}_{n2}, \quad \mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Четыре граничных условия при отсутствии зарядов и токов не являются независимыми. На практике обычно достаточно взять подходящую пару условий, остальные будут в соответствии с уравнениями Максвелла удовлетворяться автоматически.

Для классического объемного резонатора с идеально проводящими стенками условия на этих стенках имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\tau &= 0, \\ \mathbf{H}_n &= 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.4 Векторы Римана-Зильберштейна

Основные способы нахождения распределения полей связаны с решением уравнений Гельмгольца (2.10). Однако существует и другой малоизвестный способ записи уравнений Максвелла в весьма симметричной форме, который позволяет достаточно просто получить решения некоторых задач с использованием вектора Римана-Зильберштейна (RS-векторы) [1]. Этот подход имеет достаточно глубокий физический смысл, особенно с точки зрения квантовой механики.

Введем новое векторное комплексное поле (СИ):

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\epsilon\epsilon_0}\mathbf{E} + i\sqrt{\mu\mu_0}\mathbf{H} \right]. \tag{2.27}$$

Легко видеть, что электрическое и магнитное поле легко выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{\sqrt{2\epsilon\epsilon_0}} \left[\mathbf{F} + \mathbf{F}^* \right] \\ \mathbf{H} &= -\frac{i}{\sqrt{2\mu\mu_0}} \left[\mathbf{F} - \mathbf{F}^* \right]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Уравнения Максвелла при этом сводятся к единственному уравнению:

$$\nabla \times \mathbf{F} = i\frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \tag{2.29}$$

поскольку, как легко видеть, беря дивергенцию от обеих частей этого уравнения, другое равенство $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ удовлетворяется автоматически. Переходя к Фурье представлению

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \left[\tilde{\mathbf{F}}^-(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \tilde{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \right], \tag{2.30}$$

получаем, что поле $\tilde{\mathbf{F}}^{\mp}(\mathbf{r})$ является собственной функцией оператора ротор:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{F}}^{\mp} = \pm k \tilde{\mathbf{F}}^{\mp}. \tag{2.31}$$

При выбранной нормировке $\mathbf{F}$ имеет смысл комплексной амплитуды совокупного электромагнитного поля, а ее квадрат модуля

$$|\mathbf{F}|^2 \equiv \mathbf{F}^*\mathbf{F} = \frac{\epsilon_0\epsilon}{2}\mathbf{E^2} + \frac{\mu_0\mu}{2}\mathbf{H^2} \tag{2.32}$$

имеет смысл плотности энергии. В резонаторе электрические и магнитные поля обмениваются энергией, в результате чего их действительные амплитуды осциллируют. Амплитуда же $\mathbf{F}$ по модулю меняется медленно.

Не сложнее выражается через $\mathbf{F}$ и вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = -\frac{ic}{\sqrt{\epsilon\mu}}\mathbf{F}^* \times \mathbf{F}. \tag{2.33}$$

Кроме того, квадрат RS-вектора $\mathbf{F^2}$ является инвариантом преобразований Лоренца.

Вектор Римана-Зильберштейна можно связать с оператором вторичного квантования поля резонатора, и такой подход кажется весьма перспективным. Можно приписать $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}^*$ смысл собственных функций, соответствующих циркулярно поляризованным волнам или даже квантовых волновых функций фотонов[2].

Рассмотрим пример решения с помощью RS-вектора практической задачи. Найдем в цилиндрических координатах выражение для поля, которое распространяется вдоль оси z без дифракции. То есть, распределение поля не зависит от z иначе как волновым образом $e^{i\beta z}$, где β - некоторая постоянная распространения вдоль z. Из условия периодичности по ϕ это поле должно иметь зависимость вида $e^{im\phi}$, где m – целое. Таким образом,

$$\tilde{F}_{\rho,z,\phi}(\mathbf{r}) = \tilde{F}_{\rho,z,\phi}(\rho)e^{i\beta z+im\phi}. \tag{2.34}$$

Подставляя эти выражения в (2.31), и приравнивая компоненты, получаем уравнение для $\tilde{F}_z$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\tilde{F}_z}{\partial\rho}\right) + \left[k^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right]\tilde{F}_z = 0. \tag{2.35}$$

Решение этого уравнения известно:

$$\tilde{F}_z(\rho) = CJ_m(\sqrt{k^2-\beta^2}\rho), \tag{2.36}$$

где $J_m(x)$ - цилиндрическая функция Бесселя, которая у нас еще не раз возникнет в дальнейшем. Ее свойства рассмотрены в 4-ой главе. Если константа C выбрана действительной, то найденное решение порождает пучок с нулевой компонентой H_z и компонентой E_z, описываемой функцией Бесселя, а если мнимой, то нулю равна компонента E_z, а, соответственно, компонента H_z распределена по Бесселю.

Таким образом, мы показали, что бездифракционными пучками, распространяющимися в пространстве без изменения, являются бесселевы пучки. В отличие от плоских волн, которые также не испытывают дифракции, бесселевы пучки достаточно локализованы в пространстве и их плотность энергии спадает как $1/\rho$. Бесселев пучок – такая же идеализация как и плоская волна, в которой дифракция просто не определена. Реальный, ограниченный в пространстве Бесселев пучок, постепенно распадается при распространении. В последнее время интерес к бездифракционным бесселевым пучкам достаточно велик. Оптические микрорезонаторы с МШГ, которые являются основной темой курса, позволяют приготавливать бесселевы пучки высокого порядка (с большим угловым моментом).

Задание 2. *Выведите уравнение (2.35), получите выражения для остальных компонент F_ρ, F_ϕ бесселевого пучка и выпишите выражения для электрического и магнитного полей.*

2.5 Потенциалы Дебая

Волновое уравнение представляет собой систему трех связанных скалярных уравнений, которые распадаются на три скалярных уравнения Гельмгольца только в декартовой системе координат. Для удобства поиска решений, удовлетворяющих граничным условиям, желательно выбирать координатные системы, координатные поверхности которых близки или совпадают с поверхностью резонатора. Один из подходов к решению векторного уравнения Гельмгольца состоит во введении скалярных функций ψ, удовлетворяющих скалярному волновому уравнению Гельмгольца, через которые затем могут быть выражены векторные поля:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\psi &= \nabla \times (\mathbf{f}\psi), \\ \mathbf{N}_\psi &= \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times (\mathbf{f}\psi), \\ \mathbf{O}_\psi &= \nabla\psi. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Здесь $\mathbf{f}$ – некоторая векторная функция координат. Вектор $\mathbf{O}_\psi$, описывающий потенциальную часть поля, который можно положить равным нулю при отсутствии свободных зарядов, в дальнейшем не рассматривается.

Если для некоторой ортогональной координатной системы существует функция $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, пропорциональная координатному вектору, то произвольное векторное поле, удовлетворяющее векторному уравнению Гельмгольца в этой системе можно представить в виде суммы векторных функций, пропорциональных векторам $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Как следует из уравнений Максвелла (2.1) и (2.38), электрическому полю, пропорциональному $\mathbf{M}$ соответствует магнитное поле типа $\mathbf{N}$ и наоборот. При этом векторные потенциалы $\mathbf{f}\psi$ соответствуют векторам Герца.

Поскольку в этом случае поле пропорциональное $\mathbf{M}$ нормально вектору $\mathbf{f}$, его компоненты являются тангенциальными к соответствующей $\mathbf{f}$ координатной поверхности. Если границы резонатора совпадают с одной из таких координатных поверхностей, то удовлетворение граничным условиям существенно упрощается.

Такое представление возможно только в ограниченном числе ортогональных координатных систем [3]. В декартовой системе координат в качестве вектора $\mathbf{f}$ может выступать любой координатный вектор. Соответствующие решения представляют собой плоские волны. Для цилиндрической системы координат $\mathbf{f} = \mathbf{i}_z$, и в сферической $\mathbf{f} = \mathbf{r}$. Кроме того, такое представление возможно в конической координатной системе, а также относительно оси z в параболической и эллиптической цилиндрических системах, которые не представляют для нас здесь особого интереса. К сожалению, в других ортогональных координатных системах, в том числе в таких интересных с точки зрения МШГ системах с осью симметрии, как сфероидальная, тороидальная, параболическая и бисферическая, такое удобное представление не получается.

2.6 Квазинормальные моды открытых резонаторов

В открытых диэлектрических резонаторах поле нельзя считать полностью сосредоточенным в ограниченном объеме. Связь поля такого резонатора с излучением в свободном пространстве играет в описании его свойств ключевую роль. Это отличает открытые диэлектрические резонаторы от объемных резонаторов ограниченных металлическими стенками, которые применяются в СВЧ технике. Кроме того, открытые резонаторы имеют комплексные собственные частоты, при этом мнимая часть описывает потерю со временем энергии в резонаторе при выключении внешнего источника. Как следствие, моды резонатора не являются собственными функциями эрмитовой системы и комплексно сопряженные решения уже не являются решениями той же самой системы, а значит внутреннее произведение $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \int \psi_i^* \psi_j dv$ не обеспечивает систему полных и ортогональных мод.

Две эти характерные особенности создают определенные сложности для математического описания поля мод, которые становятся еще больше при корректном квантовомеханическом описании системы. Этой проблеме посвящено множество публикаций с различными подходами, но единой теории пока не создано.

На большом расстоянии от резонатора, покинувшее его поле излучения, можно представить в виде сферической расходящейся волны:

$$E \propto \frac{1}{r} e^{-i\omega(t-r/c)}. \tag{2.39}$$

Если $\omega = \omega' - i\omega''$, что соответствует затухающему со временем полю в резонаторе, то поле такой собственной квазинормальной моды экспоненциально нарастает с расстоянием: $E \propto e^{\omega'' r/c}/r$. В этом парадоксе нет ничего удивительного — излучение на большом расстоянии соответствует затухающему полю, которое было в резонаторе давно, когда амплитуда была много больше, чем в текущий момент. Однако такая особенность вызывает сложности при попытках корректно математически нормировать моды в резонаторе.

Рассмотрим характерный пример. Пусть требуется найти сдвиг частоты поля моды $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = a^{(0)}\mathbf{E}_0$, где $\mathbf{E}_j$ – ортонормированные собственные моды невозмущенного резонатора с диэлектрической проницаемостью $\epsilon^{(0)}(r)$, под действием некоторого возмущения $\epsilon^{(1)}(r)$ – это может быть как возмущение поверхности, так и некоторая флуктуация в объеме.

$$\begin{aligned}
&\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon^{(0)}(\mathbf{r}) + \epsilon^{(1)}(\mathbf{r}) \\
&\omega = \omega_0^{(0)} + \omega_0^{(1)} \\
&\nabla \times \nabla \times \mathbf{E_j} - \epsilon^{(0)} \frac{(\omega_j^{(0)})^2}{c^2} \mathbf{E_j} = 0.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Нижние индексы нумеруют моды резонатора, верхние – порядок возмущения. В случае эрмитовой системы с сохраняющейся энергией, поле новой моды в возмущенном резонаторе можно разложить по базису ортонормированных мод невозмущенного резонатора.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (a_0^{(0)} + a_0^{(1)})\mathbf{E_0}(\mathbf{r}) + \sum_{j\neq 0} a_j^{(1)} \mathbf{E_j}(\mathbf{r}). \tag{2.41}$$

Подставляя все выражения в новое уравнение Гельмгольца

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - (\epsilon^{(0)}(\mathbf{r}) + \epsilon^{(1)}(\mathbf{r})) \frac{(\omega_0^{(0)} + \omega_0^{(1)})^2}{c^2} \mathbf{E} = 0, \tag{2.42}$$

оставляя только члены первого порядка малости,

$$\epsilon^{(0)} \sum_{j \neq 0} a_j^{(1)}(\mathbf{r})[(\omega_j^{(0)})^2 - (\omega_0^{(0)})^2]\mathbf{E_j}(\mathbf{r}) \\ - 2a_0^{(0)}\epsilon^{(0)}(\mathbf{r})\omega_0^{(0)}\omega_0^{(1)}\mathbf{E_0}(\mathbf{r}) - a_0^{(0)}\epsilon^{(1)}(\mathbf{r})(\omega_0^{(0)})^2\mathbf{E_0}(\mathbf{r}) = 0, \tag{2.43}$$

домножим выражение на $\mathbf{E_0^*}(\mathbf{r})$ и из условия ортогональности после интегрирования по объему получим:

$$\frac{\omega_0^{(1)}}{\omega_0^{(0)}} = -\frac{1}{2}\frac{\int \epsilon^{(1)}(r)|\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2 dv}{\int \epsilon^{(0)}(r)|\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2 dv}. \tag{2.44}$$

Аналогично, домножая на $\mathbf{E_j^*}(\mathbf{r})$, и интегрируя по объему можно найти и коэффициенты $a_j^{(1)}$:

$$a_j^{(1)} = a_0^{(0)} \frac{(\omega_0^{(0)})^2}{(\omega_j^{(0)})^2 - (\omega_0^{(0)})^2} \frac{\int \epsilon^{(1)}(r)\mathbf{E}_j^*(\mathbf{r})\mathbf{E}_0(\mathbf{r})dv}{\int \epsilon^{(0)}(r)|\mathbf{E}_j(\mathbf{r})|^2 dv}. \tag{2.45}$$

Однако такие выражения лишены смысла для открытого резонатора, в котором, как мы видели, интеграл в знаменателе будет расходиться на бесконечности.

Математически строгое описание возможно только если одновременно рассматривается поле в резонаторе и во всем окружающем его пространстве. Следует однако отметить, что для высокодобротных резонаторов с МШГ этими тонкостями часто можно пренебречь, считая, что практически все поле заключено в объеме, ограниченном поверхностью, на которой происходит срыв излучения (внешняя каустика) или даже самой поверхностью резонатора.

Рассмотрим один из возможных подходов [4]. Рассмотрим для простоты невырожденный случай, когда все частоты резонатора различны. Случай вырожденных мод рассматривается аналогично. Пусть требуется методом теории возмущений найти собственную частоту возмущенной системы (2.42), полагая

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) \tag{2.46}$$

Пусть диэлектрик присутствует только в некоторой области размером a и на бесконечности $\epsilon^{(0)} \to 1$, $\epsilon^{(1)} \to 0$.

Вычитая из 2.42 уравнение, которому удовлетворяет невозмущенное поле $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$ (уравнение (2.40) при $j = 0$):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^{(0)} - \epsilon^{(0)}\frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2}\mathbf{E}^{(0)} = 0, \tag{2.47}$$

получим:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} - \frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2}\epsilon^{(0)}(\mathbf{r})\mathbf{E}^{(1)} = \frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2}\epsilon^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{E} + \frac{2\omega^{(0)}\omega^{(1)}}{c^2}\epsilon^{(0)}(\mathbf{r})\mathbf{E} \tag{2.48}$$

Умножим это уравнение на $\mathbf{E}^{(0)}$ и проинтегрируем по объему некоторой сферы большого радиуса $R \to \infty$. Существенно, что мы домножаем выражение не на комплексно сопряженное поле, поскольку оно не удовлетворяет при наличии потерь или излучения исходному уравнению Гельмгольца.

$$\begin{aligned}&\int_{V_R} \mathbf{E}^{(0)} \left[\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} - \frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2}\epsilon^{(0)}\mathbf{E}^{(1)}\right] dV \\ &= \frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2}\int_{V_R} \epsilon^{(1)}(\mathbf{E}^{(0)})^2\, dV + \frac{2\omega^{(0)}\omega^{(1)}}{c^2}\int_{V_R} \epsilon^{(0)}(\mathbf{E}^{(0)})^2\, dV \end{aligned} \tag{2.49}$$

При этом в правой части мы заменили $\mathbf{E}$ на $\mathbf{E}^{(0)}$, снова пренебрегая членами второго порядка малости.

Используя теорему Грина:

$$\begin{aligned}&\int_{V_R} \mathbf{E}^{(0)} \left[\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} - \frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2}\epsilon^{(0)}\mathbf{E}^{(1)}\right] dV \\ &= \int_{V_R} [\nabla^2\mathbf{E}^{(0)}\mathbf{E}^{(1)} - \nabla^2\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{E}^{(0)}]dV = \int_{V_R} \left[\frac{\partial \mathbf{E}^{(0)}}{\partial r}\mathbf{E}^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial r}\mathbf{E}^{(0)}\right] ds \end{aligned} \tag{2.50}$$

На большом расстоянии R волна превращается в сферическую – $\mathbf{E}^{(0)} \propto \frac{1}{r}e^{i\omega^{(0)}r/c}$, при этом $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} \propto \frac{1}{r}e^{i(\omega^{(0)}+\omega^{(1)})r/c}$, и для последнего интеграла получаем:

$$\begin{aligned}&\to \frac{1}{c}\int_{V_R} \left[i\omega^{(0)}\mathbf{E}^{(0)}\mathbf{E}^{(1)} - (i(\omega^{(0)} + \omega^{(1)})(\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(0)}) - i\omega^{(0)}\mathbf{E}^{(0)})\mathbf{E}^{(0)}\right] ds \\ &\to -\frac{i\omega^{(1)}}{c}\int_{V_R} (E^{(0)})^2 ds \end{aligned} \tag{2.51}$$

Откуда:

$$\frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(0)}} = -\frac{1}{2}\frac{\int\limits_{V_R} \epsilon^{(1)}(\mathbf{E}^{(0)})^2\, dV}{\int\limits_{V_R} \epsilon^{(0)}(\mathbf{E}^{(0)})^2\, dV + \frac{ic}{2\omega^{(0)}}\int\limits_{\partial V_R} (\mathbf{E}^{(0)})^2\, ds}. \tag{2.52}$$

Задание 3. *Покажите независимость знаменателя от R при $R \to \infty$.*

Отличие полученного выражения от (2.44) состоит в наличии интеграла по поверхности. Альтернативный метод избавления от расходимости на бесконечности состоит в выборе подходящего контура интегрирования в верхней полуплоскости, однако рассмотренный подход имеет явное преимущество для аналитических и численных расчетов. Важно, что получающиеся при этом интегралы являются комплексными величинами, что является проявлением неэрмитовости системы.

Литература

[1] Дж. А. Стрэттон. *Теория электромагнетизма*. ОГИЗ, Москва, Ленинград, 1948.

[2] I. Bialynicky-Birula. Photon wave function. *Progress in Optics*, 36:245–294, 1996.

[3] R. Janaswamy. A note on the TETM decomposition of electromagnetic fields in three dimensional homogeneous space. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52:2474–2476, 2004.

[4] H. M. Lai, P. T. Leung, K. Young, P. W. Barber, and S. C. Hill. Time-independent perturbation for leaking electromagnetic modes in open system with application to resonances in microdroplets. *Physical Review A*, 41:5187–5198, 1990.