

Квантовые колебательные системы

Ф.Я.Халили¹

Версия 0.2 от 14 февраля 2004 г.

¹farid@hbar.phys.msu.ru

Содержание

1	Основные принципы квантовой механики	4
1.1	Статистическая модель квантовой механики	4
1.1.1	Классические частицы	4
1.1.2	Классические волны	5
1.1.3	Квантовая частица-волна	6
1.2	Операторы	8
1.2.1	Операторы и волновые функции	8
1.2.2	Эрмитовы операторы	9
1.2.3	Собственные значения и собственные состояния операторов	11
1.3	Постулат о редукции	13
1.3.1	Точное измерение	13
1.3.2	Приближенное измерение	14
1.3.3	Проекционные операторы	15
1.4	Динамическое поведение квантовых объектов	18
1.4.1	Картина Шредингера и оператор эволюции	18
1.4.2	Картина Гейзенберга	19
1.4.3	Картина взаимодействия	21
1.5	Некоторые теоремы об операторах	24
1.5.1	Что такое функции от операторов?	24
1.5.2	Вторично коммутирующие операторы	24
1.5.3	Произвольные операторы	26
2	Квантовый гармонический осциллятор	28
2.1	Основные свойства квантового осциллятора	28
2.1.1	Основные определения	28
2.1.2	Нулевое состояние	30
2.1.3	Спектр собственных значений энергии осциллятора	31
2.1.4	Оператор свободной эволюции осциллятора	32
2.2	Осциллятор в картине Гейзенберга	34
2.2.1	Осциллятор под действием классической силы — картина Гейзенберга	34
2.2.2	Квадратурные амплитуды	36
2.3	Когерентное состояние	38
2.3.1	Осциллятор под действием классической силы — картина взаимодействия	38
2.3.2	Оператор сдвига	39
2.3.3	Основные свойства когерентного состояния	40
2.3.4	Нормальное упорядочивание операторов	42
2.4	Сжатые состояния	44
2.4.1	Параметрическое возбуждение осциллятора	44
2.4.2	Оператор сжатия	46
3	Квантовые распределенные системы	48
3.1	Двухпроводная линия	48
3.1.1	Напоминание из курса радиофизики	48
3.1.2	Квантование длинной линии	49

3.1.3	Операторы рождения и уничтожения для стоячих и бегущих волн	51
3.1.4	Переход к бесконечной линии	53
3.1.5	Энергия и плотность энергии	54
3.1.6	Плоская волна в пространстве	55
3.2	Нулевое состояние в распределенных системах	57
3.3	Монофотонное состояние	60
3.3.1	Переход к непрерывному спектру	60
3.3.2	Основные свойства монофотонного состояния	61
3.4	Когерентное состояние бегущей волны	65
3.4.1	Переход к непрерывному спектру	65
3.4.2	Основные свойства когерентного состояния бегущей волны	66
3.5	Задания	68
4	Диссипация в квантовых системах	69
4.1	Напоминание о чистых и смешанных квантовых состояниях	69
4.1.1	Оператор плотности	69
4.1.2	Квантовые состояния парциальных систем	71
4.2	Состояние теплового равновесия	73
4.2.1	Состояние с максимальной энтропией	73
4.2.2	Статистика числа квантов в состоянии теплового равновесия для гармонического осциллятора	74
4.2.3	Метод характеристической функции	75
4.2.4	Распределения вероятностей для координаты и импульса осциллятора в состоянии теплового равновесия	76
4.3	Динамическое поведение квантового осциллятора с диссипацией	79
4.3.1	Диссипация обязательно сопровождается флуктуациям	79
4.3.2	Математическое отступление: приближение вращающейся поляризации	80
4.3.3	Простой метод описания затухания в осцилляторе	82
4.4	Флуктуационно-диссипационная теорема	85
4.4.1	Введение	85
4.4.2	Случай нулевой температуры	86
4.4.3	Случай ненулевой температуры	87
5	Шумы в неравновесных линейных квантовых системах	89
5.1	Линейный квантовый двухполосник	89
5.1.1	Произвольный линейный двухполосник	89
5.1.2	Стационарный линейный двухполосник	91
5.2	Линейный квантовый четырехполосник	94
5.2.1	Общий подход	94
5.2.2	Безынерционные системы	96
5.2.3	Идеальный усилитель	98
5.2.4	Стационарный четырехполосник	99
5.2.5	Пример: интерферометрический датчик смещений	101

1 Основные принципы квантовой механики

1.1 Статистическая модель квантовой механики

1.1.1 Классические частицы

Рассмотрим одномерную классическую частицу. Ее состояние полностью задается значениями координаты x и импульса p . Если они точно не известны, то вводятся распределения вероятностей $w_x(x)$ и $w_p(p)$, между собой вообще говоря никак не связанные¹. В том числе, с их помощью можно описать и состояния с точно заданными значениями координаты и импульса:

$$w_x(x) = \delta(x - x_0), \quad w_p(p) = \delta(p - p_0). \quad (1.1.1)$$

Любые средние значения вычисляются по известному правилу. Например, среднее значение x :

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x w_x(x) dx \quad (1.1.2)$$

Чисто формально можно ввести также "волновую функцию":

$$\psi_x(x) = \sqrt{w_x(x)} e^{i\phi(x)} \quad (1.1.3)$$

где $\phi_x(x)$ - фазовый множитель, в данном случае произвольный и не несущий никакого физического смысла. С ее помощью выражение (1.1.2) можно переписать "как в квантовой механике":

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^*(x) x \psi_x(x) dx. \quad (1.1.4)$$

В случае классической частицы распределения вероятностей w_x и w_p "неделимы". Они всегда нормированы на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} w_p(p) dp = 1, \quad (1.1.5)$$

и если в результате каких-либо измерений часть распределения вероятностей зануляется, то оставшаяся подрастает, сохраняя свою нормировку.

Рассмотрим простой пример (см. рис. 1). Пусть имеется одномерный "паркет" из детекторов, которые могут зарегистрировать пролет частицы сквозь себя, и пусть на этот "паркет" сверху падает частица с неизвестным точно значением координаты x . Априорное распределение вероятности для этой координаты задается функцией $w_x^{\text{apr}}(x)$. Предполагается, что детектор возмущают состояние частицы настолько мало, насколько это возможно; в частности частица не поглощается детектором.

После того, как частица пролетит через один какой-то детектор (в случае, изображенном на рисунке — это детектор (1)), и экспериментатор регистрирует этот факт, распределение вероятностей сузится и станет равным "ломтю" априорного распределения, вырезанному прибором:

¹Индекс x или p обозначает, что это распределение вероятностей для координаты или импульса, соответственно, а то, что стоит в скобках - это переменная-аргумент этого распределения

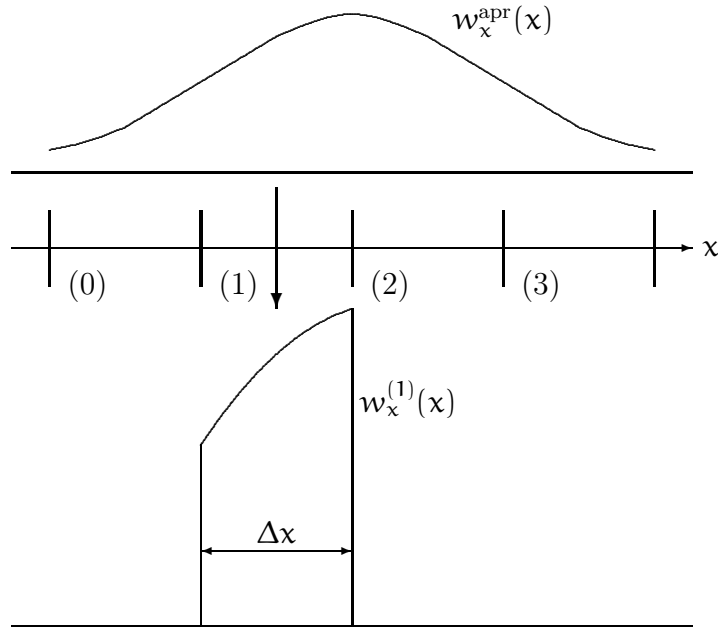


Рис. 1: Редукция распределения вероятностей

$$w_x^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{w_x^{apr}(x)}{w_1}, & x \in \Delta x, \\ 0, & x \notin \Delta x, \end{cases} \quad (1.1.6)$$

где Δx — область, занимаемая сработавшим прибором, а

$$w_1 = \int_{\Delta x} w_x^{apr}(x) dx \quad (1.1.7)$$

— нормировочный множитель. Величина w_1 задает, как легко сообразить, также априорную вероятность того, что сработает именно этот детектор.

Этот процесс называется *редукцией* распределения вероятностей.

1.1.2 Классические волны

Классическая волна описывается действительной волновой функцией $\psi_x(x)$, задающей величину отклонения какой-либо величины (например, уровня воды) в данной точке x от положения равновесия. Квадрат этой величины

$$w_x(x) = \psi_x^2(x) \quad (1.1.8)$$

задает пространственное распределение энергии, а его интеграл пропорционален суммарной энергии волны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^2(x) dx \propto \mathcal{E}. \quad (1.1.9)$$

Другая форма представления волны — это ее пространственный спектр:

$$\psi_k(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x) e^{-ikx} dx, \quad (1.1.10)$$

где k - волновое число. Нормировочный множитель $1/\sqrt{2\pi}$ обеспечивает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_k(k)|^2 dk \quad (1.1.11)$$

Чем длиннее волна в пространстве, тем более узким может быть ее спектр, то есть она более монохроматическая, и, соответственно, наоборот. Математически этот факт непосредственно следует из того, что $\psi_x(x)$ и $\psi_k(k)$ связаны преобразованием Фурье. Легко показать, что из-за этого всегда выполняется “волновое соотношение неопределенностей”:

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}. \quad (1.1.12)$$

У классической волны, очевидно, можно “отрезать” кусок Δx содержащий часть ее энергии

$$\Delta \mathcal{E} = \int_{\Delta x} |\psi_x^2(x)| dx, \quad (1.1.13)$$

и при этом никакой редукции с ней не происходит.

1.1.3 Квантовая частица-волна

Квантовый объект наследует свойства как волны, так и частицы. Как и для классической частицы, его состояние задается распределениями вероятностей $w_x(x)$ и $w_p(p)$. Как и для классической частицы, они “неделимы”, то есть при локализации квантовой частицы в какой-то области происходит редукция распределения вероятностей.

С другой стороны, как и у волны, эти распределения вероятностей не независимы. Квадратные корни из них — волновые функции — получают друг из друга через преобразование Фурье:

$$\psi_p(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x) e^{-ipx/\hbar} dx, \quad (1.1.14)$$

в точности как для волны, только с заменой $p = \hbar k$. Волновые функции комплексны, и их фазовые множители несут важный физический смысл. Они определяют распределений вероятностей для канонически сопряженных величин (у волновой функции в координатном представлении — для импульса, и наоборот).

Такая взаимная зависимость приводит к очень важному следствию: координата и импульс квантовой частицы не могут быть одновременно точно заданы. Действительно, если координата задана точно (например, равна x_0), то $\psi_x(x) \propto \delta(x - x_0)$. Подстановка такой волновой функции в формулу (1.1.14) дает, что импульс при этом полностью не определен. В более общем случае, справедливо соотношение неопределенностей

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.1.15)$$

	Редукция при измерении	Соотношение неопределенностей
Классическая частица	есть	нет
Классическая волна	нет	есть
Квантовая частица	есть	есть

Таблица 1: Квантовая частица имеет свойства как классической частицы, так и классической волны

Резюмировать сказанное можно в виде таблицы 1.

Любые средние значения вычисляются по знакомым уже правилам через распределения вероятностей.

Более строго рассмотренные свойства квантовой частицы-волны формулируются постулате редукции фон Неймана, который является основным постулатом квантовой механики. Однако перед тем, как перейти к нему, полезно вспомнить некоторые основные свойства квантовых операторов.

1.2 Операторы

1.2.1 Операторы и волновые функции

В принципе изложенной "теории" достаточно для решения любых квантовомеханических задач, кроме задач, относящихся к изменению состояния квантовых систем во времени (эволюции). Рассмотрим, однако, простой пример. Пусть известно, что наша одномерная частица локализована в области $|x| < L/2$, то есть ее волновая функция равна

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \begin{cases} 1 & |x| < L/2 \\ 0 & |x| \geq L/2 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Требуется найти среднее значение некоторой функции импульса этой частицы $f(p)$. Для этого по правилу (1.1.14) найдем волновую функцию в импульсном представлении:

$$\psi_p(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ipx/\hbar} dx = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi L}} \frac{2}{p} \sin \frac{pL}{2\hbar}, \quad (1.2.2)$$

и попытаемся ее использовать для решения задачи:

$$\langle f(p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) |\psi_p(p)|^2 dp = \frac{\hbar}{2\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \frac{4}{p^2} \sin^2 \frac{pL}{2\hbar} dp. \quad (1.2.3)$$

Получили весьма не очевидный интеграл. В то же время, задача решается просто, если ввести **оператор** импульса (не следует, конечно, думать, что это есть единственная причина использования операторов в квантовой механике; но и ее вполне достаточно). Общий лозунг: раз вся информация сидит в ψ_x , то должен быть способ извлечь ее напрямую. Попробуем проделать эти выкладки для простейшей функции $f(p) = p$:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(p) p \psi_p(p) dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^*(x) e^{\frac{ipx}{\hbar}} dx \right) p \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx \right) dp \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^*(x) \psi_x(x') e^{-\frac{ip(x-x')}{\hbar}} p dp dx dx' = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^*(x) \psi_x(x') \left(-\frac{\partial \delta(x-x')}{\partial x'} \right) dx dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_x(x)}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^*(x) \hat{p} \psi_x(x) dx, \quad (1.2.4) \end{aligned}$$

где

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.2.5)$$

- дифференциальный оператор импульса.

Точно так же можно обойтись и с любой степенью p :

$$\langle p^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^*(x) \hat{p}^n \psi_x(x) dx, \quad (1.2.6)$$

где

$$\hat{p}^n = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}, \quad (1.2.7)$$

а следовательно и с любой функцией $f(p)$, разложив ее в ряд Тэйлора:

$$f(\hat{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}. \quad (1.2.8)$$

Таким образом, средние значения любых физических величин в квантовой механике удобно вычислять, используя линейные операторы — линейные правила, переводящие волновую функцию в некоторую другую. В координатном представлении

$$\hat{x}\psi_x(x) = x\psi_x(x), \quad \hat{p}\psi_x(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\psi_x(x)}{\partial x} \quad (1.2.9)$$

Аналогично можно поступить и с p -представлении. В нем, как можно показать,

$$\hat{x}\psi_p(p) = i\hbar \frac{\partial\psi_p(p)}{\partial p}, \quad \hat{p}\psi_p(p) = p\psi_p(p). \quad (1.2.10)$$

Одна и та же волновая функция в различных представлениях является по сути тем же самым физическим объектом, только по разному записанным. То же относится и к явным формам записи одного и того же оператора в различных представлениях. Это обстоятельство используется в дираковской форме записи, инвариантной к представлению:

$$\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(p)p\psi_p(p) dp \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi_x(x) dx. \quad (1.2.11)$$

1.2.2 Эрмитовы операторы

В последней формуле левая часть явно действительна (поскольку это среднее значение координаты). В то же время из вида правой части это далеко не очевидно: она содержит мнимую единицу и функцию $\psi_x(x)$, которая, вообще говоря, может быть и комплексной. Однако можно доказать непосредственно, что это выражение действительно.

Комплексное сопряжение выражения (1.2.11) дает:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\psi_x(x)}{\partial x} dx\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x) \frac{\hbar}{-i} \frac{\partial\psi_x^*(x)}{\partial x} dx. \quad (1.2.12)$$

Дальше берем интеграл по частям, с учетом того, что $\psi_x(x)|_{\pm\infty} = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x) \frac{\hbar}{-i} \frac{\partial\psi_x(x)^*}{\partial x} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{-i} \frac{\partial\psi_x(x)}{\partial x} \psi_x^*(x) dx \quad (1.2.13)$$

В итоге получаем исходное выражение.

Легко видеть, все получилось так удачно, поскольку оператор импульса в координатном представлении содержит мнимую единицу дифференцирование по x . В итоге знак всего выражения при комплексном сопряжении меняется два раза. Операторы с такой структурой называются эрмитовыми. Поскольку их средние значения всегда

действительны, то можно заключить, что операторы, соответствующие физическим наблюдаемым, должны быть эрмитовыми.

Перейдем теперь к общему случаю произвольного оператора \hat{Q} . Пусть $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ — две волновые функции. Рассмотрим выражение

$$\langle\phi|\hat{Q}|\psi\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x^*(x) \hat{Q}_x \psi_x(x) dx. \quad (1.2.14)$$

Через \hat{Q}_x обозначен оператор \hat{Q} , взятый в координатном представлении. Например, если

$$\hat{Q} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k\hat{x}^2}{2}, \quad (1.2.15)$$

то

$$\hat{Q}_x = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (1.2.16)$$

Вычислим комплексное сопряжение формулы (1.2.14):

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi_x^*(x) \hat{Q}_x \psi_x(x) dx \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(x) \hat{Q}_x^* \psi_x^*(x) dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{Q}_x^* \psi_x^*(x)] \phi_x(x) dx. \quad (1.2.17)$$

Квадратные скобки подчеркивают, что оператор \hat{Q}_x действует только на волновую функцию ψ .

В дираковских обозначениях это выглядит так:

$$\langle\phi|\hat{Q}|\psi\rangle^* = \langle\psi|\hat{Q}^\dagger|\phi\rangle. \quad (1.2.18)$$

Волновая функция ψ теперь стала комплексно сопряженной [см. формулу (1.2.17)], и поэтому в формуле (1.2.18) стоит слева. Волновая функция ϕ , соответственно, переехала направо. Запись \hat{Q}^\dagger (эрмитовое сопряжение) обозначает, что оператор \hat{Q}_x во-первых, был комплексно сопряжен и во-вторых, действует “налево”, на волновую функцию ψ .

Для некоторых операторов справедливо утверждение, что для любых волновых функций ϕ и ψ будет

$$\langle\psi|\hat{Q}^\dagger|\phi\rangle = \langle\psi|\hat{Q}|\phi\rangle, \quad (1.2.19)$$

или, в координатном представлении,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\hat{Q}_x^* \psi_x^*(x)] \phi_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x^*(x) \hat{Q}_x \psi_x(x) dx. \quad (1.2.20)$$

(как например, мы доказали путем взятия интеграла по частям для оператора импульса). Такие операторы называются эрмитовыми.

Необходимо отметить, что в классической физике как полезные вспомогательные величины применяются и комплексные переменные. Наиболее известный пример — это комплексная амплитуда колебаний. Точно так же и в квантовой механике иногда используются неэрмитовы операторы, например оператор уничтожения квантов \hat{a} , являющийся прямым квантовым аналогом комплексной амплитуды.

1.2.3 Собственные значения и собственные состояния операторов

Определение собственных значений и собственных состояний повторять нет необходимости. Только для того, чтобы ввести обозначения, приведем следующую формулу:

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle. \quad (1.2.21)$$

Если каждому собственному значению q соответствует свое $|q\rangle$, то эти собственные состояния невырождены, Если одному q соответствует несколько различных $|q_j\rangle$ ($j = 1, 2, \dots, N$), то это собственное значение N - кратно вырождено.

Пример:

$$\hat{p}\psi(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = p\psi(x) \Rightarrow \psi(x) = \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \quad (1.2.22)$$

Еще пример:

$$\hat{H}|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle \quad (1.2.23)$$

— не зависящее от времени уравнение Шредингера.

Собственные функции и собственные значения эрмитовых операторов отличаются следующими двумя важными свойствами.

Теорема 1. У эрмитовых операторов собственные значения действительны.

Это утверждение доказывается легко:

$$\langle q|\hat{Q}|q\rangle = \langle q|(q|q\rangle) = q\langle q|q\rangle = q. \quad (1.2.24)$$

Комплексное сопряжение этой формулы дает:

$$\langle q|\hat{Q}^\dagger|q\rangle = \langle q|\hat{Q}|q\rangle = q. \quad (1.2.25)$$

Следовательно, $q^* = q$.

Теорема 2. У эрмитовых операторов собственные состояния с разными собственными значениями ортогональны.

Пусть $|q\rangle, |q'\rangle$ — два собственных состояния с собственными значениями q, q' . Для них

$$\begin{aligned} \hat{Q}|q\rangle &= q|q\rangle \\ \langle q'|\hat{Q} &= \langle q|q' \text{ в силу эрмитовости} \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Умножив первое уравнение слева на $\langle q'|$, а второе справа на $|q\rangle$ и вычтя друг из друга, получим:

$$0 = (q - q')\langle q'|q\rangle \quad (1.2.27)$$

Следовательно, если $q \neq q'$, то $\langle q'|q\rangle = 0$. Необходимо отметить, что для неэрмитовых операторов последнее свойство совершенно не обязано выполняться. Забегая вперед, в качестве примера можно привести неэрмитов оператор уничтожения \hat{a} с его неортогональными собственными значениями $|\alpha\rangle$.

Важным свойством наборов собственных состояний является также полнота. Как известно из линейной алгебры, полный набор векторов — это такой, по которому можно разложить любой другой вектор. Например, тройка некопланарных векторов в обычном трехмерном пространстве образует полный набор. Точно так же, полный набор функций $\{\phi_q(x)\}$ — это такой, по которому можно разложить любую другую функцию:

$$\psi(x) = \sum_q \psi_q \phi_q(x), \quad (1.2.28)$$

или, в дираковских обозначениях,

$$|\psi\rangle = \sum_q \psi_q |q\rangle, \quad (1.2.29)$$

где ψ_q - коэффициенты разложения. Индексы, нумерующие собственные состояния, могут быть как целыми, так и вещественными (например, у собственных состояний оператора импульса в координатном представлении). В последнем случае вместо суммирования надо, естественно, использовать интегрирование.

Последняя формула может быть также переписана в виде:

$$|\psi\rangle = \sum_q \langle q|\psi\rangle |q\rangle = \left(\sum_q |q\rangle \langle q| \right) |\psi\rangle, \quad (1.2.30)$$

где

$$\langle q|\psi\rangle = \psi_q \quad (1.2.31)$$

— коэффициенты разложения. Отсюда следует, что если $|\psi\rangle$ можно разложить по набору $\{|q\rangle\}$, то выполняется условие

$$\sum_q |q\rangle \langle q| = 1, \quad (1.2.32)$$

которое представляет собой часто используемую форму записи условия полноты этого набора.

Набор собственных состояний любого эрмитового оператора является полным, однако это свойство не уникально только для эрмитовых операторов. Можно использовать разложения и по собственным состояниям неэрмитовых операторов, правда при этом возникают чисто математические трудности из-за их неортогональности.

1.3 Постулат о редукции

1.3.1 Точное измерение

Постулат о редукции, сформулированный в начале 30-х годов фон Нейманом, устанавливает взаимосвязь между квантовым миром, описываемым волновыми функциями и операторами, и привычным нам классическим. Следует подчеркнуть, что он никак не следует из остальных положений квантовой механики (хотя многократные попытки получить его из уравнения Шредингера имели место, и продолжают до сих пор).

Постулат о редукции состоит из двух утверждений, одно из которых относится к статистике результатов измерения, а второй — к состоянию квантовой системы после проведенного над ней измерения.

1. Если перед измерением объект находился в состоянии $|\psi\rangle$, а затем была измерена наблюдаемая Q с оператором \hat{Q} , то в результате измерения абсолютно случайно будет получено одно из собственных значений q этого оператора с вероятностью $|\langle q|\psi\rangle|^2$. Точно предсказать результат измерения абсолютно невозможно (в кости играет сам Бог!), за исключением случая, когда исходная волновая функция равна какой-то из собственных функций оператора измеряемой величины, и распределение вероятностей для результатов измерения вырождается в δ -функцию. Этот пункт постулата редукции воспроизводит положение о вероятностной интерпретации волновой функции, появившейся после безуспешных попыток рассматривать ее как какую-то реальную классическую волну.
2. Если измерение идеальное, то есть возмущает объект настолько мало, насколько разрешает квантовая механика, то все последующие аналогичные измерения с вероятностью единица дадут тот же результат, то есть после измерения объект будет в состоянии $|q\rangle$. Вероятностная интерпретация оставляла открытым вопрос, как меняется состояние системы в результате измерения. В принципе аппарат квантовой механики допускал два варианта: (1) последующие измерения будут давать такую же статистику, как первое, то есть волновая функция останется равной $|\psi\rangle$; либо (2) последующие измерения будут давать такой же результат, как и первое, то есть волновая функция станет равной $|q\rangle$. Проведенные эксперименты показали, что реализуется второй вариант.

Очевидно, что сумма вероятностей всех возможных результатов измерений должна быть равна единице. Полнота наборов собственных функций эрмитовых операторов как раз гарантирует выполнение этого условия (это одно из проявлений удивительного соответствия между тонкостями математического аппарата квантовой физики и очевидными свойствами реального физического мира). Действительно,

$$\sum_q |\langle q|\psi\rangle|^2 = \sum_q \langle \psi|q\rangle \langle q|\psi\rangle = \langle \psi| \left(\sum_q |q\rangle \langle q| \right) |\psi\rangle = 1. \quad (1.3.1)$$

[с учетом условия (1.2.32)].

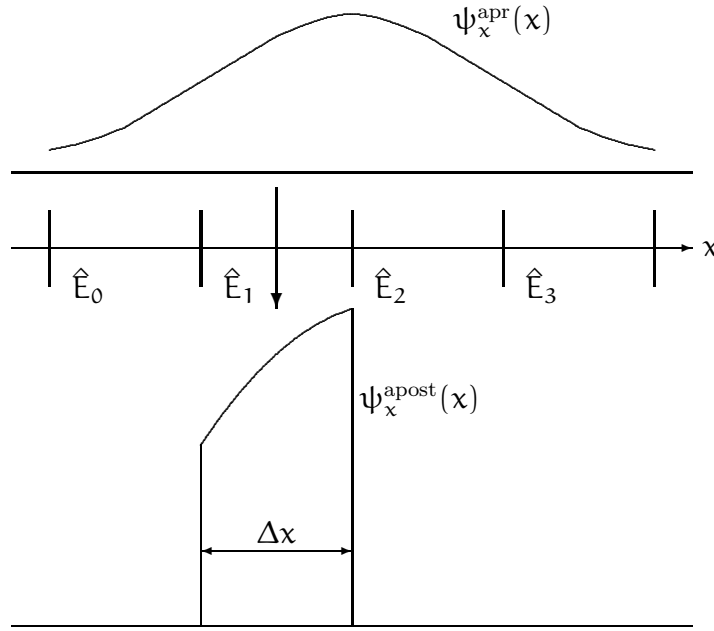


Рис. 2: Редукция волновой функции

1.3.2 Приближенное измерение

Фон Нейманом был также предложен простой способ рассмотрения приближенных измерений, основанный на так называемых проекционных операторах.

Рассмотрим опять измерение с “паркетом” детекторов и пролетом через них частицы (см. Рис. 2). Очевидно, что оно представляет собой приближенное измерение координаты x пролетающей через них частицы, причем ошибка измерения равна ширине каждого детектора Δx .

Пусть, опять, сработал счетчик номер один. В соответствии с духом сформулированного в предыдущем разделе принципа, в результате такого измерения волновая функция станет равной

$$\psi_x^{\text{apost}}(x) = \begin{cases} \frac{\psi_x^{\text{apr}}(x)}{\sqrt{w_1}}, & x \in \Delta x, \\ 0, & x \notin \Delta x, \end{cases} \quad (1.3.2)$$

где

$$w_1 = \int_{\Delta x} |\psi_x^{\text{apr}}(x)|^2 dx \quad (1.3.3)$$

— вновь, как для классической редукции, априорная вероятность такого процесса.

Последние две формулы собственно и представляют собой формулировку постулата о редукции для рассмотренного приближенного измерения координаты. Осталось только переписать ее в дираковских обозначениях:

$$|\psi_1\rangle = \frac{\hat{E}_1 |\psi^{\text{apr}}\rangle}{\sqrt{w_1}}, \quad (1.3.4)$$

где

$$w_1 = \langle \psi^{\text{appr}} | \hat{E}_1 \cdot \hat{E}_1 | \psi^{\text{appr}} \rangle \equiv \langle \psi^{\text{appr}} | \hat{E}_1 | \psi^{\text{appr}} \rangle, \quad (1.3.5)$$

а

$$\hat{E}_1 = \int_{\Delta x} |x\rangle \langle x| dx \quad (1.3.6)$$

— оператор редукции.

При выводе формулы (1.3.5) использовалось то обстоятельство, что $\hat{E}_1 \cdot \hat{E}_1 \equiv \hat{E}_1$.

Отметим, что все свойства рассмотренной процедуры измерения, для заданного начального состояния $|\psi^{\text{appr}}\rangle$, определяются набором операторов \hat{E}_j , где индекс j нумерует счетчики.

Обобщение на общий случай очевидно. Все множество собственных значений измеряемой величины $\{q\}$ разбивается на непересекающиеся подмножества $\{q\}_1, \{q\}_2, \{q\}_3$ и т.д., каждому из которых соответствует один из возможных результатов измерения. Для каждого из этих подмножеств строится оператор

$$\hat{E}_j = \sum_{q \in \{q\}_j} |q\rangle \langle q|. \quad (1.3.7)$$

При этом, если перед измерением частица находилась в состоянии с волновой функцией $|\psi\rangle$, то:

1. **Вероятность получения результата номер j в таком измерении будет равна**

$$w_j = \langle \psi | \hat{E}_j | \psi \rangle. \quad (1.3.8)$$

2. **После измерения, при условии, что был получен результат номер j , частица перейдет в состояние**

$$|\psi_j\rangle = \frac{\hat{E}_j |\psi\rangle}{\sqrt{w_j}} \quad (1.3.9)$$

1.3.3 Проекционные операторы

Операторы вида (1.3.7) называются проекционными операторами, поскольку для любого набора собственных векторов $\{q\}$ оператор

$$\hat{E}_{\{q\}} = \sum_{q \in \{q\}} |q\rangle \langle q| \quad (1.3.10)$$

проектирует произвольный волновой вектор $|\psi\rangle$ вектор на подпространство, натянутое на этот набор.

Характерным свойством проекционных операторов является *ортogonalность*: если два набора векторов $\{q_1\}$ и $\{q_2\}$ не пересекаются, то

$$\hat{E}_{\{q_1\}} \cdot \hat{E}_{\{q_2\}} = 0, \quad \hat{E}_{\{q_1\}} \cdot \hat{E}_{\{q_1\}} = \hat{E}_{\{q_1\}}, \quad \hat{E}_{\{q_2\}} \cdot \hat{E}_{\{q_2\}} = \hat{E}_{\{q_2\}}. \quad (1.3.11)$$

Кроме того, наборы проекционных операторов (1.3.7), описывающие приближенные квантовые измерения, обладают также свойством *полноты*:

$$\sum_j E_j = \sum_q |q\rangle\langle q| = 1. \quad (1.3.12)$$

Это равенство следует как из свойства полноты наборов собственных векторов эрмитовых операторов, так и из очевидного физического факта, что сумма вероятностей всех возможных результатов измерения равна единице:

$$\sum_j w_j = 1. \quad (1.3.13)$$

По этой причине такие наборы операторов называются разложениями единицы.

Следует отметить, что рассмотренные т.н. ортогональные приближенные измерения, описываемые наборами ортогональных проекционных операторов — т.н. ортогональными разложениями единицы — представляют собой лишь простейший случай приближенных измерений. Действительно, в этом случае последующие измерения с помощью того же прибора с вероятностью единица дают тот же самый результат, что и первое, и, соответственно, не меняют волновую функцию объекта (в предположении, что собственная эволюция объекта отсутствует, или же измерения следуют достаточно быстро друг за другом, чтобы ею можно было пренебречь). В этом ортогональные приближенные измерения похожи на точные. Однако для реальных приближенных измерений, в большинстве случаев, все происходит не так: каждое последующее измерение может давать другой результат, в пределах погрешности предыдущего, и точность измерения от измерения к измерения копится, то есть распределение вероятностей для измеряемой величины (и волновая функция) с каждым измерением сужаются. В 60-е и 70-е годы был разработан математический аппарат так называемых неортогональных измерений, представляющий собой обобщение постулата о редукции фон Неймана и позволяющий описывать любые измерения. Однако этот аппарат выходит за пределы данного курса.

В заключение, приведем простой наглядный пример набора проекционных операторов. Рассмотрим обычное трехмерное пространство. В нем волновой функции $|\psi\rangle$ соответствует вектор - столбец:

$$|\psi\rangle \sim \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad (1.3.14)$$

а сопряженной волновой функции — вектор-строка

$$\langle\psi| \sim (a_x \ a_y \ a_z), \quad (1.3.15)$$

Операторы - это, естественно. матрицы 3×3 . В таком пространстве возможно шесть проекционных операторов: три, проектирующих на одномерные подпространства (оси координат):

$$\hat{E}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.3.16)$$

и три, проектирующих на двумерные подпространства (координатные плоскости):

$$\hat{E}_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3.17)$$

1.4 Динамическое поведение квантовых объектов

1.4.1 Картина Шредингера и оператор эволюции

Эволюция волновой функции во времени описывается уравнением Шредингера, которое само по себе является экспериментальным фактом и не может быть выведено из других формул квантовой механики:

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{\mathcal{H}}|\psi(t)\rangle, \quad (1.4.1)$$

где $\hat{\mathcal{H}}$ - гамильтониан данной системы. Решение этого уравнения, в общем случае, может быть представлено в виде:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle, \quad (1.4.2)$$

где $\hat{U}(t)$ — оператор эволюции.

Основное свойство этого оператора — его унитарность — вытекает из того, что что нормировка волновой функции в процессе эволюции сохраняется. Действительно,

$$\frac{d\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle}{dt} = \langle\psi(t)|\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} + \frac{d\langle\psi(t)|}{dt}|\psi(t)\rangle. \quad (1.4.3)$$

Подставив сюда выражение для $d|\psi\rangle/dt$ из уравнения Шредингера, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle}{dt} &= \langle\psi(t)|\frac{\hat{\mathcal{H}}|\psi(t)\rangle}{i\hbar} + \frac{\langle\psi(t)|\hat{\mathcal{H}}^\dagger}{-i\hbar}|\psi(t)\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left(\langle\psi(t)|\hat{\mathcal{H}}|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|\hat{\mathcal{H}}|\psi(t)\rangle \right) \equiv 0. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

В то же время,

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\frac{d\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)}{dt}|\psi(0)\rangle. \quad (1.4.5)$$

Следовательно, должно быть

$$\frac{d\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)}{dt} = 0. \quad (1.4.6)$$

Отсюда с учетом очевидного условия, что $\hat{U}(0) = 1$, следует, что

$$\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = \hat{U}^\dagger(0)\hat{U}(0) = 1. \quad (1.4.7)$$

то есть

$$\hat{U}^\dagger(t) = \hat{U}^{-1}(t). \quad (1.4.8)$$

Операторы, удовлетворяющие этому условию, называются *унитарными*. Они соответствуют комплексным числам, имеющим равный единице модуль (в том же смысле, как эрмитовы операторы соответствуют действительным числам). В частности, любой унитарный оператор может быть представлен в виде

$$\hat{U} = e^{i\hat{\phi}}, \quad (1.4.9)$$

где $\hat{\phi}$ — некоторый эрмитов оператор.

Из уравнения Шредингера следует, что оператор эволюции удовлетворяет операторному дифференциальному уравнению

$$i\hbar \frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \hat{\mathcal{H}}\hat{U}(t). \quad (1.4.10)$$

В частном случае, когда гамильтониан системы явно не зависит от времени, $\hat{\mathcal{H}} = \text{const}$, решение этого уравнения Шредингера можно записать в виде

$$\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{\hat{\mathcal{H}}t}{i\hbar}\right) \quad (1.4.11)$$

Напомним, что его, как и любую другую операторную функцию, надо понимать как разложение в ряд:

$$\hat{U}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\hat{\mathcal{H}}t}{i\hbar}\right)^n. \quad (1.4.12)$$

Может возникнуть искушение написать аналогичную и формулу и для общего случая, когда гамильтониан явно зависит от времени:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{\mathcal{H}}(t') dt'\right) \quad (\text{неправильно!}). \quad (1.4.13)$$

Позже мы выясним, почему так нельзя делать.

Уравнение (1.4.10) очень редко удается решить непосредственно. В общем это и не страшно, так как в реальных задачах требуется знать только эволюцию средних значений различных наблюдаемых. Поэтому используются так называемые картины эволюции - Шредингера, Гейзенберга и картина взаимодействия.

Все сводится к группировке сомножителей в выражении для среднего значения. Пусть Q - некоторая физическая величина, \hat{Q} - ее оператор. Тогда

$$\langle Q(t) \rangle = \langle \psi(0) | \hat{U}^\dagger(t) \hat{Q} \hat{U}(t) | \psi(0) \rangle. \quad (1.4.14)$$

Например, в картине эволюции Шредингера сомножители группируются так:

$$\underbrace{\langle \psi(0) | \hat{U}^\dagger(t)}_{\langle \psi(t) |} \hat{Q} \underbrace{\hat{U}(t) | \psi(0) \rangle}_{| \psi(t) \rangle} = \langle \psi(t) | \hat{Q} | \psi(t) \rangle, \quad (1.4.15)$$

где $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$ — зависящая от времени волновая функция, удовлетворяющая уравнению Шредингера.

1.4.2 Картина Гейзенберга

Можно сгруппировать сомножители иначе:

$$\langle \psi(0) | \underbrace{\hat{U}^\dagger(t) \hat{Q} \hat{U}(t)}_{\hat{Q}_T(t)} | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \hat{Q}_T(t) | \psi(0) \rangle, \quad (1.4.16)$$

где

$$\hat{Q}_\Gamma(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{Q} \hat{U}(t) \quad (1.4.17)$$

— оператор \hat{Q} в картине эволюции Гейзенберга. В этой картине эволюции зависят от времени операторы, а волновые функции не изменяются.

Уравнение движение для операторов в картине Гейзенберга легко получается непосредственным дифференцированием оператора $\hat{Q}_\Gamma(t)$. При выводе учтем также, что исходный оператор \hat{Q} (в картине Шредингера) может явно зависеть от времени (с такими операторами мы столкнемся чуть позже):

$$\frac{d\hat{Q}_\Gamma(t)}{dt} = \frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} \hat{Q} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \hat{Q} \frac{d\hat{U}(t)}{dt}. \quad (1.4.18)$$

Подставим сюда выражения для производных оператора эволюции:

$$\frac{d\hat{Q}_\Gamma(t)}{dt} = \frac{\hat{U}^\dagger(t) \hat{\mathcal{H}}}{-i\hbar} \hat{Q} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \hat{Q}(t) \frac{\hat{\mathcal{H}} \hat{U}(t)}{i\hbar}, \quad (1.4.19)$$

С учетом того, что оператор эволюции унитарен, это выражение можно переписать в виде:

$$\frac{d\hat{Q}_\Gamma(t)}{dt} = \frac{\hat{U}^\dagger(t) \hat{\mathcal{H}} \hat{U}(t)}{-i\hbar} \hat{U}^\dagger(t) \hat{Q} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \hat{Q}(t) \hat{U}(t) \frac{\hat{U}^\dagger(t) \hat{\mathcal{H}} \hat{U}(t)}{i\hbar}, \quad (1.4.20)$$

или

$$i\hbar \frac{d\hat{Q}_\Gamma(t)}{dt} = i\hbar \frac{\partial \hat{Q}_\Gamma(t)}{\partial t} + [\hat{Q}_\Gamma(t), \hat{\mathcal{H}}_\Gamma(t)], \quad (1.4.21)$$

где, по определению,

$$\frac{\partial \hat{Q}_\Gamma(t)}{\partial t} = \hat{U}^\dagger(t) \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \hat{U}(t). \quad (1.4.22)$$

Уравнение (1.4.21) представляет собой искомый закон движения для гейзенберговских операторов.

Отметим следующее удобное обстоятельство, очень упрощающее работу в картине Гейзенберга. Пусть \hat{P} и \hat{Q} — некоторые операторы, а \hat{K} — их коммутатор:

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = \hat{K}. \quad (1.4.23)$$

Тогда в картине Гейзенберга будет:

$$\begin{aligned} [\hat{P}_\Gamma, \hat{Q}_\Gamma] &= \hat{U}^\dagger \hat{P} \hat{U} \cdot \hat{U}^\dagger \hat{Q} \hat{U} - \hat{U}^\dagger \hat{Q} \hat{U} \cdot \hat{U}^\dagger \hat{P} \hat{U} \\ &= \hat{U}^\dagger \hat{P} \hat{Q} \hat{U} - \hat{U}^\dagger \hat{Q} \hat{P} \hat{U} = \hat{U}^\dagger [\hat{P}, \hat{Q}] \hat{U} = \hat{U}^\dagger \hat{K} \hat{U} = \hat{K}_\Gamma. \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

То есть коммутаторы в картине Гейзенберга *сохраняют свой вид*. В частности, если K — число (а не оператор), то оно просто остается прежним. Например, для координаты и импульса по прежнему $[x_\Gamma, p_\Gamma] = i\hbar$.

Рассмотрим простейший пример использования картины Гейзенберга, где особенно наглядно проявляются ее преимущества — свободную массу m , находящуюся под действием внешней классической силы $F(t)$.

Ее гамильтониан равен

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - F(t)\hat{x}, \quad (1.4.25)$$

где x и p — как обычно, координата и импульс.

Для координаты уравнение движение будет:

$$i\hbar \frac{d\hat{x}_\Gamma}{dt} = [\hat{x}_\Gamma, \hat{\mathcal{H}}_\Gamma] = \frac{[\hat{x}_\Gamma, \hat{p}_\Gamma^2]}{2m}. \quad (1.4.26)$$

Коммутатор вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{x}_\Gamma \hat{p}_\Gamma^2 - \hat{p}_\Gamma^2 \hat{x}_\Gamma &= \hat{x}_\Gamma \hat{p}_\Gamma^2 - \hat{p}_\Gamma \hat{x}_\Gamma \hat{p}_\Gamma + \hat{p}_\Gamma \hat{x}_\Gamma \hat{p}_\Gamma - \hat{p}_\Gamma^2 \hat{x}_\Gamma \\ &= (\hat{x}_\Gamma \hat{p}_\Gamma - \hat{p}_\Gamma \hat{x}_\Gamma) \hat{p}_\Gamma + \hat{p}_\Gamma (\hat{x}_\Gamma \hat{p}_\Gamma - \hat{p}_\Gamma \hat{x}_\Gamma) = i\hbar \hat{p}_\Gamma + \hat{p}_\Gamma i\hbar = 2i\hbar \hat{p}_\Gamma. \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Следовательно,

$$\frac{d\hat{x}_\Gamma}{dt} = \frac{\hat{p}_\Gamma}{m}. \quad (1.4.28)$$

Аналогичным образом получается второе уравнение, для оператора импульса:

$$\frac{d\hat{p}_\Gamma}{dt} = F(t). \quad (1.4.29)$$

То есть получились уравнения во первых, точно такие же, как и для классического случая, и, во-вторых, линейные. Последнее обстоятельство позволяет легко проинтегрировать их, получив решение вновь точно такое же, как и для классического случая. В качестве начальных условий для гейзенберговских операторов координаты и импульса выступают, как легко сообразить, эти операторы в картине Шредингера:

$$\hat{x}_\Gamma = \hat{x} + \frac{\hat{p} t}{m} + \frac{1}{m} \int_0^t F(t')(t - t') dt'. \quad (1.4.30)$$

С помощью этой формулы можно очень легко вычислить, например, среднее значение и дисперсию координаты x в любой момент времени, если известны их значения в начальный момент времени.

1.4.3 Картина взаимодействия

Наряду с картинами эволюции Шредингера и Гейзенберга часто используется и промежуточная т.н. *картина взаимодействия*. Представим гамильтониан системы в виде двух слагаемых (ясно, что это можно сделать всегда бесконечным числом способов):

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1, \quad (1.4.31)$$

Пусть \hat{U}_0 — оператор эволюции, соответствующий гамильтониану $\hat{\mathcal{H}}_0$, то есть удовлетворяющий уравнению

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_0(t)}{dt} = \hat{\mathcal{H}}_0 \hat{U}_0(t). \quad (1.4.32)$$

Представим полный оператор эволюции системы \hat{U} в виде

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_0(t)\hat{U}_1(t), \quad (1.4.33)$$

и подставим это выражение в уравнение движения для него:

$$i\hbar \frac{d}{dt} (\hat{U}_0(t)\hat{U}_1(t)) = \hat{\mathcal{H}}\hat{U}_0(t)\hat{U}_1(t). \quad (1.4.34)$$

Дифференцируя левую часть по обычному правилу, и подставляя в правую часть выражение для гамильтониана, получим:

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_0(t)}{dt} \hat{U}_1(t) + i\hbar \hat{U}_0(t) \frac{d\hat{U}_1(t)}{dt} = \hat{\mathcal{H}}_0\hat{U}_0(t)\hat{U}_1(t) + \hat{\mathcal{H}}_1\hat{U}_0(t)\hat{U}_1(t). \quad (1.4.35)$$

Первые слагаемые в левой и правой частях сокращаются в силу (1.4.32), и в итоге получаем:

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_1(t)}{dt} = \hat{\mathcal{H}}_{1B}(t)\hat{U}_1(t), \quad (1.4.36)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_{1B}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t)\hat{\mathcal{H}}_1\hat{U}_0(t) \quad (1.4.37)$$

— гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}_1$ “как бы” в картине Гейзенберга, но с оператором эволюции \hat{U}_0 , соответствующим гамильтониану $\hat{\mathcal{H}}_0$ вместо полного гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}$.

Вернемся теперь к общей формуле эволюции средних значений операторов. Подставив в него наш расщепленный на два компонента оператор эволюции, можно сгруппировать сомножители в этом выражении так:

$$\begin{aligned} \langle \psi(0) | \hat{U}^\dagger(t) \hat{Q} \hat{U}(t) | \psi(0) \rangle &= \langle \psi(0) | (\hat{U}_0(t)\hat{U}_1(t))^\dagger \hat{Q} \hat{U}_0(t)\hat{U}_1(t) | \psi(0) \rangle \\ &= \underbrace{\langle \psi(0) | \hat{U}_1^\dagger(t)} \cdot \underbrace{\hat{U}_0^\dagger(t) \hat{Q} \hat{U}_0(t)} \cdot \underbrace{\hat{U}_1(t) | \psi(0) \rangle} = \langle \psi_B(t) | \hat{Q}_B(t) | \psi_B(t) \rangle, \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

где оператор $\hat{Q}_B(t)$ удовлетворяет такому же уравнению движения, как в картине Гейзенберга, но с гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}_0$ вместо полного гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}$:

$$\frac{d\hat{Q}_B(t)}{dt} = i\hbar \frac{\partial \hat{Q}_B(t)}{\partial t} + [\hat{Q}_B(t), \hat{\mathcal{H}}_0], \quad (1.4.39)$$

а волновая функция $|\psi_B(t)\rangle$ — уравнению Шредингера с зависящим от гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}_{1B}$:

$$i\hbar \frac{d|\psi_B(t)\rangle}{dt} = \hat{\mathcal{H}}_{1B}(t)|\psi_B(t)\rangle \quad (1.4.40)$$

Может показаться, что мы только вдвое усложнили задачу: теперь нужно решать и уравнения движения для операторов, и уравнение Шредингера для волновой функции. Однако картина взаимодействия во многих случаях упрощает решение и используется чрезвычайно широко. Стандартная ситуация, где она удобна — это когда для гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_0$ эволюция системы либо уже известна, либо может

быть легко найдена, а гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}_1$ представляет собой малую поправку. Тогда уравнение для волновой функции может быть решено методом последовательных приближений:

$$|\psi_B(t)\rangle = |\psi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 \hat{\mathcal{H}}_{1B}(t_1) |\psi(0)\rangle + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{\mathcal{H}}_{1B}(t_1) \hat{\mathcal{H}}_{1B}(t_2) |\psi(0)\rangle + \dots \quad (1.4.41)$$

(то, что это действительно решение, проверяется непосредственной подстановкой).

Часто в таких задачах $\hat{\mathcal{H}}_0$ представляет собой гамильтониан системы невзаимодействующих частиц, а $\hat{\mathcal{H}}_1$ описывает относительно малое взаимодействие между ними. Отсюда и происходит термин “картина взаимодействия”.

1.5 Некоторые теоремы об операторах

1.5.1 Что такое функции от операторов?

Данный раздел посвящен технике вычислений с операторами. В нем приводятся, и частично доказываются, несколько формул, которые мы будем использовать ниже.

Прежде всего, необходимо уяснить, что имеется в виду под *функциями от операторов*. Например, если \hat{p} — это оператор импульса, то что такое, например,

$$\sin a\hat{p} = \sin \left(a \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \quad ? \quad (1.5.1)$$

(a — численный коэффициент, вставленный для размерности).

Достаточно очевидно, что такое степень от оператора: это просто последовательное применение этого оператора столько раз, чему равен показатель степени. Например,

$$\hat{p}^n = \left(\frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{d^n}{dx^n}. \quad (1.5.2)$$

Исходя из этого, функции от операторов можно определять через разложения в ряд Тэйлора: если x — число, и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad (1.5.3)$$

то для оператора \hat{Q} будет

$$f(\hat{Q}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{Q}^n, \quad (1.5.4)$$

В частности, для приведенного выше примера,

$$\sin a\hat{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a^{2n+1} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^{2n+1} \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}. \quad (1.5.5)$$

С такими функциями можно, в некоторых пределах, обращаться как с обычными числовыми функциями (естественно, проявляя должное уважение к некоммутативности операторов). Например, их можно дифференцировать по их аргументам — операторам.

1.5.2 Вторично коммутирующие операторы

Пусть \hat{Q} и \hat{P} — это два оператора, удовлетворяющие условиям

$$[[\hat{Q}, \hat{P}], \hat{Q}] = 0 \quad \text{и} \quad [[\hat{Q}, \hat{P}], \hat{P}] = 0. \quad (1.5.6)$$

Такие операторы называются вторично коммутирующими. Они заслуживают особого внимания по двум причинам. Во первых, в эту категорию попадает множество очень важных операторов. Действительно, вторично коммутирующими являются все операторы, у которых коммутатор является числом — например, координата и

импульс, или операторы рождения и уничтожения квантов у гармонического осциллятора. Во вторых, свойство вторичной коммутативности чрезвычайно упрощает вычисления с такими операторами, делая их почти такими же простыми, как вычисления с числами.

Для вторично коммутирующих операторов справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. Если n — натуральное число, то

$$[\hat{Q}, \hat{P}^n] = n\hat{P}^{n-1} [\hat{Q}, \hat{P}] . \quad (1.5.7)$$

Доказательство. Эта формула легко доказывается непосредственно:

$$\begin{aligned} [\hat{Q}, \hat{P}^n] &= \hat{Q}\hat{P}^n - \hat{P}^n\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P}^n - \hat{P}\hat{Q}\hat{P}^{n-1} + \hat{P}\hat{Q}\hat{P}^{n-1} - \dots + \hat{P}^{n-1}\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}^n\hat{Q} \\ &\quad (\text{добавлено } n-1 \text{ новых слагаемых и столько же вычтено}) \\ &= [\hat{Q}, \hat{P}] \hat{P}^{n-1} + \hat{P} [\hat{Q}, \hat{P}] \hat{P}^{n-2} + \dots + \hat{P}^{n-2} [\hat{Q}, \hat{P}] \hat{P} + \hat{P}^{n-1} [\hat{Q}, \hat{P}] \quad (\text{всего } n \text{ слагаемых}) \\ &= n\hat{P}^{n-1} [\hat{Q}, \hat{P}] . \quad (1.5.8) \end{aligned}$$

($[\hat{Q}, \hat{P}]$ и \hat{P} можно свободно переставлять в силу вторичной коммутативности).

Теорема 4. Если $f(x)$ — некоторая функция, то

$$[\hat{Q}, f(\hat{P})] = \frac{df(\hat{P})}{d\hat{P}} [\hat{Q}, \hat{P}] . \quad (1.5.9)$$

Доказательство. С помощью разложения функции $f(\hat{P})$ в ряд это высказывание сводится к предыдущему:

$$[\hat{Q}, f(\hat{P})] = [\hat{Q}, \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{P}^n] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n [\hat{Q}, \hat{P}^n] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n n \hat{P}^{n-1} [\hat{Q}, \hat{P}] = \frac{df(\hat{P})}{d\hat{P}} [\hat{Q}, \hat{P}] . \quad (1.5.10)$$

Теорема 5. Если ξ — некоторое число, то

$$e^{\xi\hat{P}} \hat{Q} e^{-\xi\hat{P}} = \hat{Q} + \xi [\hat{P}, \hat{Q}] . \quad (1.5.11)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^{\xi\hat{P}} \hat{Q} e^{-\xi\hat{P}} &= e^{\xi\hat{P}} (\hat{Q} e^{-\xi\hat{P}} - e^{-\xi\hat{P}} \hat{Q} + e^{-\xi\hat{P}} \hat{Q}) = e^{\xi\hat{P}} [\hat{Q}, e^{-\xi\hat{P}}] + \hat{Q} \\ &\quad (\text{коммутатор вычисляется по теореме 4}) \\ &= e^{\xi\hat{P}} \frac{de^{-\xi\hat{P}}}{d\hat{P}} [\hat{Q}, \hat{P}] + \hat{Q} = \hat{Q} - e^{\xi\hat{P}} \xi e^{-\xi\hat{P}} [\hat{Q}, \hat{P}] = \hat{Q} - \xi [\hat{Q}, \hat{P}] = \hat{Q} + \xi [\hat{P}, \hat{Q}] . \quad (1.5.12) \end{aligned}$$

Теорема 6.

$$e^{\hat{Q}+\hat{P}} = e^{\hat{P}} e^{\hat{Q}} e^{\frac{1}{2}[\hat{Q}, \hat{P}]} = e^{\hat{Q}} e^{\hat{P}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{Q}, \hat{P}]} \quad (1.5.13)$$

Доказательство этого утверждения довольно громоздко, поэтому мы не будем приводить его здесь. Отметим лишь, что оно наглядно демонстрирует необходимость осторожности при вычислениях с операторами. Упрощение типа

$$e^{\hat{Q}+\hat{P}} = e^{\hat{Q}}e^{\hat{P}} \quad (\text{неправильно!}) \quad (1.5.14)$$

является распространенной ошибкой при таких вычислениях. То, что это выражение некорректно, хорошо видно из разложения в ряд левой и правой частей:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hat{Q} + \hat{P})^n}{n!} \neq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{Q}^m \hat{P}^n}{m! n!} \quad (1.5.15)$$

(в правой части все \hat{Q} стоят слева от \hat{P} , а в левой — вперемешку).

1.5.3 Произвольные операторы

Теорема 7. Если n — натуральное число, то

$$\hat{P}^{-1} \hat{Q}^n \hat{P} = (\hat{P}^{-1} \hat{Q} \hat{P})^n. \quad (1.5.16)$$

Доказательство. Эта формула также доказывается непосредственно:

$$\begin{aligned} \hat{P}^{-1} \hat{Q}^n \hat{P} &= \hat{P}^{-1} \hat{Q} \hat{Q} \dots \hat{Q} \hat{P} = \hat{P}^{-1} \hat{Q} (\hat{P} \hat{P}^{-1}) \hat{Q} (\hat{P} \hat{P}^{-1}) \dots (\hat{P} \hat{P}^{-1}) \hat{Q} \hat{P} \\ &\quad (\text{добавлено } n - 1 \text{ единичных множителей } \hat{P} \hat{P}^{-1} = 1) \\ &= (\hat{P}^{-1} \hat{Q} \hat{P}) (\hat{P}^{-1} \hat{Q} \hat{P}) \dots (\hat{P}^{-1} \hat{Q} \hat{P}) = (\hat{P}^{-1} \hat{Q} \hat{P})^n. \\ &\quad (\text{и сомножители перегруппированы}) \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

Теорема 8. Если $f(x)$ — некоторая функция, то

$$\hat{P}^{-1} f(\hat{Q}) \hat{P} = f(\hat{P}^{-1} \hat{Q} \hat{P}). \quad (1.5.18)$$

Доказательство. Эта теорема, как и теорема 4, сводится к предыдущей с помощью разложения функции $f(\hat{Q})$ в ряд:

$$\hat{P}^{-1} f(\hat{Q}) \hat{P} = \hat{P}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{Q}^n \hat{P} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\hat{P}^{-1} \hat{Q} \hat{P})^n = f(\hat{P}^{-1} \hat{Q} \hat{P}). \quad (1.5.19)$$

Важным следствием этой теоремы является случай, когда оператор \hat{P} представляет собой оператор эволюции \hat{U} . Тогда при вычислении эволюции оператора $f(\hat{Q})$ (в картине Гейзенберга) можно пользоваться простым правилом

$$\hat{U}(t)^\dagger f(\hat{Q}) \hat{U}(t) = f[\hat{U}(t)^\dagger \hat{Q} \hat{U}(t)] = f[\hat{Q}_\Gamma(t)]. \quad (1.5.20)$$

Теорема 9. Если ξ — некоторое число, то

$$e^{\xi \hat{P}} \hat{Q} e^{-\xi \hat{P}} = \hat{Q} + \xi [\hat{P}, \hat{Q}] + \frac{\xi^2}{2} [\hat{P}, [\hat{P}, \hat{Q}]] + \dots + \frac{\xi^n}{n!} [\hat{P}, \dots, [\hat{P}, \hat{Q}] \dots] + \dots \quad (1.5.21)$$

n раз

Доказательство. Разложим выражение $e^{\xi\hat{P}}\hat{Q}e^{-\xi\hat{P}}$ в ряд Тэйлора по ξ :

$$e^{\xi\hat{P}}\hat{Q}e^{-\xi\hat{P}} = e^{\xi\hat{P}}\hat{Q}e^{-\xi\hat{P}}\Big|_{\xi=0} + \xi \frac{de^{\xi\hat{P}}\hat{Q}e^{-\xi\hat{P}}}{d\xi}\Big|_{\xi=0} + \dots + \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^n e^{\xi\hat{P}}\hat{Q}e^{-\xi\hat{P}}}{d\xi^n}\Big|_{\xi=0} + \dots \quad (1.5.22)$$

Производные вычисляются непосредственным последовательными интегрированием:

$$\frac{de^{\xi\hat{P}}\hat{Q}e^{-\xi\hat{P}}}{d\xi} = e^{\xi\hat{P}}\hat{P}\hat{Q}e^{-\xi\hat{P}} - e^{\xi\hat{P}}\hat{Q}\hat{P}e^{-\xi\hat{P}} = e^{\xi\hat{P}}[\hat{P}, \hat{Q}]e^{-\xi\hat{P}}, \quad (1.5.23)$$

$$\frac{d^2 e^{\xi\hat{P}}\hat{Q}e^{-\xi\hat{P}}}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left(e^{\xi\hat{P}}[\hat{P}, \hat{Q}]e^{-\xi\hat{P}} \right) = e^{\xi\hat{P}}[\hat{P}, [\hat{P}, \hat{Q}]]e^{-\xi\hat{P}}, \quad (1.5.24)$$

и так далее. Используя метод математической индукции, легко доказать, что

$$\frac{d^n e^{\xi\hat{P}}\hat{Q}e^{-\xi\hat{P}}}{d\xi^n} = e^{\xi\hat{P}}[\hat{P}, \dots, [\hat{P}, \hat{Q}]\dots]e^{-\xi\hat{P}}, \quad (1.5.25)$$

n раз

что и доказывает данную теорему.

Можно отметить также, что если операторы \hat{P} и \hat{Q} вторично коммутируют, то ряд обрывается на втором члене, и получается теорема 5.

2 Квантовый гармонический осциллятор

2.1 Основные свойства квантового осциллятора

В современной квантовой физике гармонический осциллятор занимает особое место, примерно такое же, какое занимал водородоподобный атом в первые 20-30 лет истории квантовой механики. Причина этого в том, что при квантовании электромагнитного поля оно рассматривается как набор осцилляторов. А квантовые свойства электромагнитного поля последние десятилетия, после появления квантовых генераторов СВЧ и оптического диапазонов (мазеров и лазеров), привлекают к себе все больше и больше внимания.

2.1.1 Основные определения

Стандартным примером гармонического осциллятора является материальная точка, к которой приделана пружина. Ее гамильтониан равен

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k\hat{q}^2}{2}, \quad (2.1.1)$$

где \hat{q} и \hat{p} — координата и импульс, m — масса, k — жесткость пружины. Вместо m и k можно ввести два других параметра, однозначно связанных с ними: собственную частоту колебаний $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и волновое сопротивление $\rho = \sqrt{km}$. Тогда будет:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{\hat{p}^2}{\rho} + \rho\hat{q}^2 \right). \quad (2.1.2)$$

Эта форма записи удобна своей инвариантностью к конкретной физической природе осциллятора. Гамильтониан LC-контура или моду электромагнитной волны выглядят точно так же, меняется только смысл координаты, импульса и волнового сопротивления.

Уравнения движения для координаты и импульса (в картине эволюции Гейзенберга) имеют, как легко показать, вид:

$$\frac{d\hat{q}_\Gamma(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{\rho} \hat{p}_\Gamma(t), \quad (2.1.3a)$$

$$\frac{d\hat{p}_\Gamma(t)}{dt} = -\omega_0\rho\hat{q}_\Gamma(t). \quad (2.1.3b)$$

В классической физике при решении подобных задач часто пара действительных переменных q и p заменяется одной комплексной амплитудой

$$X = q + \frac{ip}{\rho}, \quad (2.1.4)$$

которая позволяет заменить два дифференциальных уравнения для q и p одним:

$$\frac{dX(t)}{dt} = -i\omega_0 X(t). \quad (2.1.5)$$

Конечно, в случае единственного осциллятора в такой замене не очень много смысла, но для сложных систем с большим числом степеней свободы эта замена, вдвое сокращающая число уравнений, существенно упрощает решение. Точно так же можно

поступить и в квантовом случае, введя неэрмитов оператор комплексной амплитуды \hat{X} . Однако по историческим причинам вместо оператора \hat{X} используется пропорциональный ему безразмерный оператор уничтожения квантов

$$\hat{a} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}q_0} = \frac{\hat{q} + i\hat{p}/\rho}{\sqrt{2}q_0}, \quad (2.1.6)$$

где

$$q_0 = \sqrt{\hbar/\rho} \quad (2.1.7)$$

— т.н. *амплитуда нулевых колебаний* осциллятора (этимология этих названий будет обсуждена чуть позже).

Эрмитово сопряженный партнер оператора \hat{a} — *оператор рождения квантов*

$$\hat{a}^+ = \frac{\hat{q} - i\hat{p}/\rho}{\sqrt{2}q_0}. \quad (2.1.8)$$

Операторы \hat{a} и \hat{a}^+ не коммутируют между собой:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1. \quad (2.1.9)$$

Нетрудно выразить операторы координаты и импульса через операторы рождения и уничтожения:

$$\hat{q} = \frac{q_0}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+), \quad \hat{p} = \frac{\rho q_0}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+). \quad (2.1.10)$$

Подставив эти выражения в формулу для гамильтониана осциллятора (2.1.1), получим, что

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hbar\omega_0}{2} (\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}) \equiv \hbar\omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.1.11)$$

где $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$ — *оператор числа квантов*.

Вычислим коммутаторы этого оператора с операторами \hat{a} и \hat{a}^+ :

$$[\hat{a}, \hat{n}] = \hat{a}\hat{a}^+\hat{a} - \hat{a}^+\hat{a}\hat{a} = (\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a})\hat{a} = [\hat{a}, \hat{a}^+]\hat{a} = \hat{a}. \quad (2.1.12)$$

Аналогично,

$$[\hat{a}^+, \hat{n}] = -\hat{a}^+. \quad (2.1.13)$$

Отметим еще полезные формулы, следующие из этих коммутаторов:

$$\hat{n}\hat{a} = \hat{a}(\hat{n} - 1), \quad \hat{a}\hat{n} = (\hat{n} + 1)\hat{a}, \quad (2.1.14a)$$

$$\hat{n}\hat{a}^+ = \hat{a}^+(\hat{n} + 1), \quad \hat{a}^+\hat{n} = (\hat{n} - 1)\hat{a}^+. \quad (2.1.14b)$$

2.1.2 Нулевое состояние

Энергия осциллятора — это неотрицательно определенная функция координаты и импульса, поэтому она не может быть отрицательной. В классической физике она может быть равна нулю — при $q = 0, p = 0$. В квантовой физике это, естественно, невозможно, так как это означало бы, что энергия и импульс осциллятора одновременно точно заданы. Найдем, каково может быть минимальное значение энергии осциллятора с учетом соотношения неопределенностей.

Средняя энергия осциллятора равна

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho} + \rho \langle q^2 \rangle \right) = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{\langle p \rangle^2}{\rho} + \rho \langle q \rangle^2 \right) + \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{\Delta_p^2}{\rho} + \rho \Delta_q^2 \right). \quad (2.1.15)$$

Очевидно, что в состоянии, где энергия минимальна, должно быть $\langle q \rangle = 0, \langle p \rangle = 0$. Дисперсии же одновременно не могут быть равны нулю, так как в силу соотношения неопределенностей

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta q}. \quad (2.1.16)$$

Напомним, что равенство здесь достигается, если волновая функция в координатном представлении имеет гауссовский вид:

$$\psi_q(q) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\Delta_q^2}} \exp\left(-\frac{q^2}{4\Delta_q^2}\right). \quad (2.1.17)$$

Следовательно, энергия не может быть меньше, чем

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{\hbar^2}{4\rho\Delta_q^2} + \rho\Delta_q^2 \right). \quad (2.1.18)$$

Минимум этого выражения достигается при

$$\Delta q = \frac{q_0}{\sqrt{2}}, \quad (2.1.19)$$

и равен энергии нулевых колебаний

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad (2.1.20)$$

В радиофизике и теории колебаний хорошо известно, что амплитудное значение переменной, меняющейся по гармоническому значению, в $\sqrt{2}$ раз больше ее среднеквадратичного значения. По этой причине величина q_0 и получила название амплитуды нулевых колебаний.

В координатном представлении волновая функция состояния с минимальной энергией равна, как следует из сказанного,

$$\psi_{q_0}(q) = \langle q|0 \rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi q_0^2}} \exp\left(-\frac{q^2}{2q_0^2}\right). \quad (2.1.21)$$

Нетрудно убедиться непосредственным вычислением, что эта волновая функция является собственной функцией оператора энергии, с собственным значением $\hbar\omega_0/2$, собственной функцией оператора числа квантов, с собственным значением, равным нулю, а также собственной функцией оператора уничтожения, также с нулевым собственным значением:

$$\hat{\mathcal{H}}|0\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2}|0\rangle, \quad \hat{n}|0\rangle = 0, \quad \hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.1.22)$$

2.1.3 Спектр собственных значений энергии осциллятора

Пусть $|n\rangle$ — это собственное состояние оператора энергии, и следовательно, также и оператора числа квантов, и n — соответствующее с собственное значение оператора числа квантов:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.1.23)$$

Поддействуем оператором числа квантов на состояния $\hat{a}|n\rangle$ и $\hat{a}^+|n\rangle$. В силу тождеств (2.1.14) будет:

$$\hat{n}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}(\hat{n}-1)|n\rangle = \hat{a}(n-1)|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle, \quad (2.1.24a)$$

$$\hat{n}\hat{a}^+|n\rangle = \hat{a}^+(\hat{n}+1)|n\rangle = \hat{a}^+(n+1)|n\rangle = (n+1)\hat{a}^+|n\rangle. \quad (2.1.24b)$$

Следовательно, состояния $\hat{a}|n\rangle$ и $\hat{a}^+|n\rangle$, с точностью до нормировочных множителей, также являются собственными для оператора числа квантов, с собственными значениями $n-1$ и $n+1$, соответственно:

$$\hat{a}|n\rangle = C_n|n-1\rangle, \quad (2.1.25a)$$

$$\hat{a}^+|n\rangle = D_n|n+1\rangle. \quad (2.1.25b)$$

Значения этих множителей легко найти следующим образом:

$$\langle n|\hat{a}^+ \cdot \hat{a}|n\rangle = \langle n|C_n \cdot C_n|n\rangle = C_n^2, \quad (2.1.26a)$$

$$\langle n|\hat{a} \cdot \hat{a}^+|n\rangle = \langle n|D_n \cdot D_n|n\rangle = D_n^2. \quad (2.1.26b)$$

С другой стороны,

$$\langle n|\hat{a}^+ \cdot \hat{a}|n\rangle = \langle n|\hat{n}|n\rangle = n, \quad (2.1.27a)$$

$$\langle n|\hat{a} \cdot \hat{a}^+|n\rangle = \langle n|(\hat{n}+1)|n\rangle = n+1. \quad (2.1.27b)$$

Следовательно,

$$C_n = \sqrt{n}, \quad D_n = \sqrt{n+1}. \quad (2.1.28)$$

Продолжая равенства (2.1.25) по индукции, можно показать, что состояния $\hat{a}^2|n\rangle, \hat{a}^3|n\rangle, \dots$ и $(\hat{a}^+)^2|n\rangle, (\hat{a}^+)^3|n\rangle, \dots$ также будут собственными с собственными значениями $n-2, n-3, \dots$ и $n+2, n+3, \dots$ (отметим, что отсюда происходит и название этих операторов: они, соответственно, уменьшают и увеличивают значение числа квантов на единицу).

С другой стороны, собственные значения энергии осциллятора ограничены снизу значением $\hbar\omega_0/2$, а числа квантов, соответственно, нулем. Отсюда следует, что собственные значения оператора числа квантов могут быть только целыми числами. Действительно, если бы было возможно некоторое нецелое собственное значением n , то в силу сказанного и числа $n-1, n-2, n-3, \dots$ также были бы собственными значениями, и эта последовательность в конце концов пересекла бы ноль устремила к $-\infty$. Только в том случае, когда n — целое, этот ряд обрывается в нуле условием $\hat{a}|0\rangle = 0$.

Мы показали тем самым, что собственные значения оператора числа квантов представляют собой неотрицательные целые числа. Соответствующие собственные состояния могут быть получены последовательным действием оператора рождения квантов:

$$|1\rangle = \hat{a}^+|0\rangle, \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^+)^2|0\rangle, \quad \dots \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle, \quad \dots \quad (2.1.29)$$

Используя полученное в предыдущем параграфе выражение для волновой функции нулевого состояния в координатном представлении, можно получить явную формулу в этом представлении и для любого состояния $|n\rangle$:

$$\psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi} q_0} \left(\frac{q}{q_0} - q_0 \frac{d}{dq} \right)^n \exp\left(-\frac{q^2}{2q_0^2}\right). \quad (2.1.30)$$

2.1.4 Оператор свободной эволюции осциллятора

Оператор эволюции, описывающий динамику изолированного осциллятора, равен

$$\hat{U}_0(t) = e^{\frac{\hat{H}_0 t}{i\hbar}} = e^{-i\omega_0 t \hat{n}} e^{-i\omega_0 t/2}. \quad (2.1.31)$$

Вторая экспонента, не содержащая операторов и поэтому не влияющая ни на какие окончательные выражения, обычно отбрасывают, полагая оператор свободной эволюции равным

$$\hat{U}_0(t) = \hat{R}(\omega_0 t), \quad (2.1.32)$$

где

$$\hat{R}(\theta) = e^{-i\theta \hat{n}}. \quad (2.1.33)$$

Для того, чтобы найти действие этого оператора на, например, операторы координаты и импульса, удобно сначала найти его действие на оператор уничтожения квантов \hat{a} . В принципе выражение $\hat{U}_0^\dagger(t) \hat{a} \hat{U}_0(t)$ может быть вычислено прямо в лоб, однако намного проще воспользоваться гейзенберговским уравнением движения:

$$\frac{d\hat{a}_\Gamma(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_\Gamma(t), \hat{\mathcal{H}}_0] = -i\omega_0 \hat{a}_\Gamma(t). \quad (2.1.34)$$

Из него следует, что

$$\hat{a}_\Gamma(t) = \hat{a} e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.1.35)$$

и, соответственно,

$$\hat{\mathcal{R}}^\dagger(\theta) \hat{a} \hat{\mathcal{R}}(\theta) = \hat{a} e^{-i\theta}. \quad (2.1.36a)$$

Эрмитовое сопряжение этой формулы дает:

$$\hat{\mathcal{R}}^\dagger(\theta) \hat{a}^\dagger \hat{\mathcal{R}}(\theta) = \hat{a}^\dagger e^{i\theta}. \quad (2.1.36b)$$

Комбинируя последние две формулы, нетрудно получить выражения для операторов координаты и импульса:

$$\hat{\mathcal{R}}^\dagger(\theta) \hat{x} \hat{\mathcal{R}}(\theta) = \frac{q_0}{\sqrt{2}} (\hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) = \hat{q} \cos \theta + \frac{\hat{p}}{\rho} \sin \theta, \quad (2.1.37a)$$

$$\hat{\mathcal{R}}^\dagger(\theta) \hat{p} \hat{\mathcal{R}}(\theta) = \frac{q_0 \rho}{i\sqrt{2}} (\hat{a} e^{-i\theta} - \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) = -\rho \hat{p} \sin \theta + \hat{p} \cos \theta. \quad (2.1.37b)$$

Мы получили хорошо известный из классической теории колебаний результат: свободная эволюция гармонического осциллятора может быть представлена как вращение на фазовой плоскости $\{x, p/\rho\}$ на угол $\theta = \omega_0 t$ по часовой стрелке.

2.2 Осциллятор в картине Гейзенберга

Картина Гейзенберга очень удобна для рассмотрения эволюции гармонического осциллятора. Причина этого в том, что гейзенберговские уравнения движения для операторов координаты и импульса являются линейными. Другими словами, они не содержат произведений операторов, и поэтому любые некоммутативности здесь никак не проявляются. В итоге как сами уравнения, так и их решение по виду не отличаются от классических. Разница лишь в том, что в качестве начальных условий в них стоят операторы в картине Шредингера.

2.2.1 Осциллятор под действием классической силы — картина Гейзенберга

Рассмотрим несколько более сложную задачу, чем просто изолированный осциллятор, а именно, осциллятор, на который действует классическая внешняя сила $F(t)$. Гамильтониан такой системы равен:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{\hat{p}^2}{\rho_0} + \rho_0 \hat{q}^2 \right) - F(t) \hat{q}. \quad (2.2.1)$$

Используя формулу (1.4.21), получим, что уравнения движения для операторов координаты и импульса такой системы имеют вид:

$$\frac{d\hat{q}_\Gamma(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{\rho} \hat{p}_\Gamma(t), \quad (2.2.2a)$$

$$\frac{d\hat{p}_\Gamma(t)}{dt} = -\omega_0 \rho \hat{q}_\Gamma(t) + F(t). \quad (2.2.2b)$$

Их решение равно (проверяется непосредственной подстановкой):

$$\hat{q}_\Gamma(t) = \hat{q} \cos \omega_0 t + \frac{\hat{p}}{\rho} \sin \omega_0 t + \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t') \sin \omega_0(t - t') dt', \quad (2.2.3a)$$

$$\hat{p}_\Gamma(t) = -\rho \hat{q} \sin \omega_0 t + \hat{p} \cos \omega_0 t + \int_0^t F(t') \cos \omega_0(t - t') dt'. \quad (2.2.3b)$$

Основную информацию о состоянии системы несут, как правило, моменты первых двух порядков — средние значения и дисперсии. Поэтому вычислим эти моменты для координаты и импульса осциллятора. Средние значения получаются непосредственным усреднением соотношений (2.2.3):

$$\langle q(t) \rangle = \langle q \rangle \cos \omega_0 t + \frac{\langle p \rangle}{\rho} \sin \omega_0 t + \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t') \sin \omega_0(t - t') dt', \quad (2.2.4a)$$

$$\langle p(t) \rangle = -\rho \langle q \rangle \sin \omega_0 t + \langle p \rangle \cos \omega_0 t + \int_0^t F(t') \cos \omega_0(t - t') dt'. \quad (2.2.4b)$$

Получились, как и следовало ожидать, уравнения, точно совпадающие с классическими.

Чтобы получить законы эволюции для дисперсий, необходимо возвести в квадрат формулы (2.2.3), усреднить результаты и вычесть из них возведенные в квадрат формулы (2.2.4). Вычислим также закон эволюции для перекрестного второго момента

$$\Delta_{qp} = \frac{1}{2} \langle \hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q} \rangle - \langle \hat{q} \rangle \langle \hat{p} \rangle, \quad (2.2.5)$$

для чего перемножим формулы (2.2.3) между собой, усредним результат и вычтем из него произведение формул (2.2.4). В результате получим:

$$\begin{aligned} \Delta_q^2(t) &= \Delta_q^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{\Delta_p^2}{\rho^2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{\Delta_{qp}}{\rho} \sin 2\omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} \left(\Delta_q^2 + \frac{\Delta_p^2}{\rho^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\Delta_q^2 - \frac{\Delta_p^2}{\rho^2} \right) \cos 2\omega_0 t + \frac{\Delta_{qp}}{\rho} \sin 2\omega_0 t, \end{aligned} \quad (2.2.6a)$$

$$\begin{aligned} \Delta_p^2(t) &= \rho^2 \Delta_q^2 \sin^2 \omega_0 t + \Delta_p^2 \cos^2 \omega_0 t - \rho \Delta_{qp} \sin 2\omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} (\rho^2 \Delta_q^2 + \Delta_p^2) - \frac{1}{2} (\rho^2 \Delta_q^2 - \Delta_p^2) \cos 2\omega_0 t - \rho \Delta_{qp} \sin 2\omega_0 t, \end{aligned} \quad (2.2.6b)$$

$$\Delta_{qp}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_p^2}{\rho} - \rho \Delta_q^2 \right) \sin 2\omega_0 t + \Delta_{qp} \cos 2\omega_0 t. \quad (2.2.6c)$$

В поведении вторых моментов можно отметить следующие особенности.

1. Они не зависят от внешней силы $F(t)$. В гармоническом осцилляторе классическая сила изменяет только средние значения координаты и импульса, а дисперсии (так же, как и все остальные центрированные моменты высших порядков) определяются исключительно начальным состоянием.
2. Дисперсии координаты и импульса осциллируют с частотой $2\omega_0$ в противофазе друг с другом, причем для максимальных и минимальных значений этих дисперсий справедливо соотношение неопределенностей

$$\Delta_{q_{\max}}^2 \Delta_{q_{\min}}^2 = \frac{\Delta_{p_{\max}}^2 \Delta_{p_{\min}}^2}{\rho^4} = \frac{\Delta_q^2 \Delta_p^2 - \Delta_{qp}^2}{\rho^2} \geq \frac{\hbar^2}{4\rho^2}. \quad (2.2.7)$$

3. Если в начальный момент времени выполняются соотношения

$$\Delta_q^2 = \frac{\Delta_p^2}{\rho^2}, \quad \Delta_{qp} = 0, \quad (2.2.8)$$

то они продолжают выполняться и во все последующие моменты времени. То есть такой выбор начальных дисперсий дает состояние, в котором координата в любой момент времени может быть представлена как сумма ее среднего значения, меняющегося по классическому закону, и не зависящей от времени квантовой неопределенности (то же относится и к импульсу).

4. Особый интерес представляет состояние, когда неопределенности координаты и импульса не только удовлетворяют соотношению (2.2.7), но и еще малы настолько, насколько это допускает квантовая механика, то есть удовлетворяют равенству

$$\Delta_q \Delta_p = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.2.9)$$

Легко показать, что для этого они должны быть равны

$$\Delta_q = \frac{\Delta_p}{\rho} = \frac{q_0}{\sqrt{2}}. \quad (2.2.10)$$

Если при этом еще и средние значения координаты и импульса равны нулю, то получается нулевое состояние $|0\rangle$. Если же они отличны от нуля, то соответствующее состояние называется когерентным. Подробнее оно будет рассмотрено чуть позже.

2.2.2 Квадратурные амплитуды

При анализе динамического поведения осцилляторов (не только квантовых) очень часто используются переменные, называемые *квадратурными амплитудами* косинусная q_C и синусная q_S . Они определяются по правилам:

$$\hat{q}_C(t) = \hat{q}_R(t) \cos \omega_0 t - \frac{\hat{p}_R(t)}{\rho} \sin \omega_0 t, \quad (2.2.11a)$$

$$\hat{q}_S(t) = \hat{q}_R(t) \sin \omega_0 t + \frac{\hat{p}_R(t)}{\rho} \cos \omega_0 t. \quad (2.2.11b)$$

Эти формулы могут быть записаны в другой форме:

$$\hat{q}_C(t) = \hat{\mathcal{R}}(\omega_0 t) \hat{q}_R(t) \hat{\mathcal{R}}^\dagger(\omega_0 t), \quad (2.2.12a)$$

$$\hat{q}_S(t) = \hat{\mathcal{R}}(\omega_0 t) \frac{\hat{p}_R(t)}{\rho} \hat{\mathcal{R}}^\dagger(\omega_0 t). \quad (2.2.12b)$$

“Неправильный” порядок операторов эволюции (слева без креста, справа с крестом) говорит о том, что такое преобразование описывает поворот фазовой плоскости в сторону, противоположную направлению ее вращения при свободной эволюции, то есть против часовой стрелки. Часто используется другая геометрическая аналогия: преобразование (2.2.11) рассматривается как переход на фазовой плоскости к вращающейся по часовой стрелке системе координат.

Подставив в формулы (2.2.11) выражения (2.2.3) для операторов координаты и импульса осциллятора, на который действует классическая сила, получим:

$$\hat{q}_C(t) = \hat{q} - \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t') \sin \omega_0 t' dt', \quad (2.2.13a)$$

$$\hat{q}_S(t) = \frac{\hat{p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t') \cos \omega_0 t' dt'. \quad (2.2.13b)$$

При использовании этих переменных, формулы (2.2.4, 2.2.6) для вторых моментов и дисперсий существенно упрощаются:

$$\langle q_c(t) \rangle = \langle q \rangle - \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t') \sin \omega_0 t' dt', \quad (2.2.14a)$$

$$\langle q_s(t) \rangle = \frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t') \cos \omega_0 t' dt', \quad (2.2.14b)$$

$$\Delta_{q_c}^2(t) = \Delta_q^2, \quad (2.2.15a)$$

$$\Delta_{q_s}^2(t) = \frac{\Delta_p^2}{\rho^2}, \quad (2.2.15b)$$

$$\Delta_{q_c p_s}(t) = \frac{\Delta_{qp}}{\rho}. \quad (2.2.15c)$$

Следовательно, вторые моменты квадратурных амплитуд в осцилляторе, на который действует классическая сила (и в изолированном осцилляторе, естественно, тоже) сохраняются.

2.3 Когерентное состояние

2.3.1 Осциллятор под действием классической силы — картина взаимодействия

В каком состоянии будет находиться осциллятор, который исходно был в нулевом состоянии, а затем был раскачан внешней классической силой? Очевидно, что это не может быть состояние с заданным числом квантов. В состоянии с заданным числом квантов средние значения координаты и импульса тождественно равны нулю, в то время как для состояния, которое получается под действием классической внешней силы, эти средние значения, как было показано, изменяются во времени по синусоидальному закону, как для классического осциллятора.

Вычислим это состояние, используя представления взаимодействия. Представим гамильтониан (2.2.1) осциллятора, на который действует классическая внешняя сила $F(t)$ в виде суммы гамильтониана изолированного осциллятора (2.1.1) и добавка, соответствующего внешней силе:

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = -F(t)\hat{q}. \quad (2.3.1)$$

Оператор эволюции при этом будет равен

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_0(t)\hat{U}_1(t), \quad (2.3.2)$$

где \hat{U}_0 — оператор свободной эволюции, соответствующий гамильтониану $\hat{\mathcal{H}}_0$, а \hat{U}_1 — добавок, описывающий собственно действие внешней силы. Легко показать, что уравнение движения для него будет иметь вид:

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_1(t)}{dt} = -F(t)\hat{q}_0(t)\hat{U}_1(t), \quad (2.3.3)$$

где

$$\hat{q}_0(t) = \hat{q} \cos \omega_0 t + \frac{\hat{p}}{\rho} \sin \omega_0 t. \quad (2.3.4)$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, разобьем весь интервал интегрирования от 0 до t на участки малой длительности θ , выбрав θ так, чтобы гамильтониан, стоящий в правой части уравнений (2.3.3), за это время не успевал заметно измениться. Тогда, заменив производную в левой части этого уравнения конечной разностью, получим:

$$\hat{U}_1(\theta) \approx \hat{U}_1(0) - \frac{\theta}{i\hbar} F(0)\hat{q}_0(0)\hat{U}_1(0) \approx \exp\left(\frac{i\theta}{\hbar} F(0)\hat{q}_0(0)\right). \quad (2.3.5)$$

Здесь учтено, что $\hat{U}_1(0) = 1$.

В следующий момент времени 2θ будет:

$$\hat{U}_1(2\theta) \approx \exp\left(\frac{i\theta}{\hbar} F(\theta)\hat{q}_0(\theta)\right) \hat{U}_1(\theta) \approx \exp\left(\frac{i\theta}{\hbar} F(\theta)\hat{q}_0(\theta)\right) \exp\left(\frac{i\theta}{\hbar} F(0)\hat{q}_0(0)\right). \quad (2.3.6)$$

Объединять две экспоненты нельзя, так как стоящие в их показателях операторы не коммутируют. Однако они вторично коммутируют, следовательно, используя теорему 6, последнее выражение может быть приведено к виду:

$$\hat{U}_1(2\theta) \approx \exp\left(\frac{i\theta}{\hbar}[F(0)\hat{q}_0(0) + F(\theta)\hat{q}_0(\theta)]\right) \exp(i\phi_{10}), \quad (2.3.7)$$

где

$$i\phi_{jk} = \left[\frac{i\theta}{\hbar}F(j\theta)\hat{q}_0(j\theta), \frac{i\theta}{\hbar}F(k\theta)\hat{q}_0(k\theta), \right] \quad (2.3.8)$$

(j, k — целые числа). Точный вид этого коммутатора нам не важен, важно только, что ϕ_{jk} — действительное число.

Действуя далее по индукции, для моментов времени $3\theta, 4\theta, \dots$, получим:

$$\hat{U}_1(N\theta) \approx \exp\left(\frac{i\theta}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} F(n\theta)\hat{q}_0(n\theta)\right) \exp(i\phi), \quad (2.3.9)$$

где ϕ — вновь некоторое действительное число, образовавшееся в результате многократного суммирования коммутаторов.

Вторую экспоненту в этой формуле можно отбросить, так как она не содержит операторов. Дело в том, что в окончательные формулы (для средних значений операторов) операторы эволюции \hat{U} всегда входят парами с \hat{U}^\dagger , следовательно, на каждое $\exp(i\phi)$ будет приходиться $\exp(-i\phi)$, и они будут сокращаться. Таким образом, то, что гамильтониан $\hat{H}_1(t)$ вторично коммутирует сам с собой в различные моменты времени, позволяет проинтегрировать уравнение (2.3.3) так, как если бы оно вообще не содержало операторов.

Перейдем к пределу, положив $\theta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ и $N\theta \rightarrow t$. При этом суммирование в последней формуле перейдет в интегрирование, и в итоге мы получим:

$$\hat{U}_1(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t F(t')\hat{q}_0(t') dt'\right). \quad (2.3.10)$$

Мы показали в итоге, что квантовое состояние, которое получается в результате действия на осциллятор классической внешней силы, может быть получено как результат действия на начальное состояние оператора эволюции (2.3.10) с последующей свободной эволюцией в течение времени t [см. формулу (2.3.2)].

2.3.2 Оператор сдвига

Выразим оператор $\hat{q}_0(t)$ через операторы рождения и уничтожения:

$$\hat{q}_0(t) = \frac{q_0}{\sqrt{2}} (\hat{a}e^{-i\omega_0 t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 t}). \quad (2.3.11)$$

Подставив это выражение в формулу (2.3.10), можно переписать ее в виде:

$$\hat{U}_1(t) = \hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}, \quad (2.3.12)$$

где

$$\alpha = \frac{iq_0 F^*(\omega_0)}{\hbar\sqrt{2}}, \quad (2.3.13)$$

а

$$F(\omega) = \int_0^t F(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.3.14)$$

— спектр той части силы $F(t)$, которая действовала на интервале времени от 0 до t .

Оператор $\mathcal{D}(\alpha)$ носит специальное название *оператора сдвига*. Чтобы уяснить смысл этого названия, рассмотрим действие этого оператора на оператор уничтожения. Используя теорему 5, легко показать, что

$$\hat{\mathcal{D}}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \hat{a} + [\hat{a}, \alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}] = \hat{a} + \alpha [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a} + \alpha. \quad (2.3.15)$$

Подставив эту формулу в соотношения (2.1.10), получим, что

$$\hat{\mathcal{D}}^\dagger(\alpha) \hat{q} \hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \hat{q} + \sqrt{2} q_0 \Re \alpha = \hat{q} - \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t') \sin \omega_0 t' dt', \quad (2.3.16a)$$

$$\hat{\mathcal{D}}^\dagger(\alpha) \hat{p} \hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \hat{p} + \sqrt{2} p q_0 \Im \alpha = \hat{p} + \int_0^t F(t') \cos \omega_0 t' dt' \quad (2.3.16b)$$

[сравните эти формулы с формулами (2.2.13)].

Следовательно, оператор $\mathcal{D}(\alpha)$ сдвигает среднее значение координаты на величину, пропорциональную действительной части α , и импульса — на величину, пропорциональную мнимой части α . Значения дисперсий этих наблюдаемых, как было отмечено выше, не изменяются.

С помощью теоремы 6 оператор сдвига может быть переписан в несколько иной форме:

$$\hat{\mathcal{D}}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{-|\alpha|^2/2}. \quad (2.3.17)$$

Такая форма записи, где все операторы \hat{a} стоят справа от операторов \hat{a}^\dagger , носит название *нормально упорядоченной*. Во многих случаях она существенно упрощает вычисления.

Действие оператора сдвига на нулевое состояние:

$$|\alpha\rangle = \hat{\mathcal{D}}(\alpha)|0\rangle \quad (2.3.18)$$

дает состояние, в котором дисперсии координаты и импульса такие же, как в нулевом состоянии, а их средние значения определяются параметром α :

$$\langle q \rangle = \sqrt{2} q_0 \Re \alpha, \quad (2.3.19a)$$

$$\langle p \rangle = \sqrt{2} p q_0 \Im \alpha. \quad (2.3.19b)$$

Такое состояние носит название *когерентного*.

2.3.3 Основные свойства когерентного состояния

Координатное представление Исходя из вида волновой функции в нулевом состоянии (2.1.21), нетрудно выписать явный вид волновой функции когерентного состояния в координатном представлении:

$$\psi_{q\alpha}(q) = \langle q|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi q_0^2}} \exp\left(-\frac{(q - \sqrt{2}q_0\Re\alpha)^2}{2q_0^2}\right) \exp\left(\frac{\sqrt{2}i\rho q_0\Im\alpha}{\hbar} q\right). \quad (2.3.20)$$

Энергетическое представление Чтобы найти вид волновой функции когерентного состояния в энергетическом представлении, воспользуемся формой записи оператора сдвига (2.3.17):

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{\alpha^*\hat{a}}|0\rangle. \quad (2.3.21)$$

Легко показать, что оператор $e^{-\alpha^*\hat{a}}$ оставляет состояние $|0\rangle$ неизменным. Действительно, разложим эту экспоненту в ряд Тэйлора:

$$e^{\alpha^*\hat{a}}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^*)^n \hat{a}^n}{n!} |0\rangle. \quad (2.3.22)$$

Все слагаемые в этой сумме, кроме слагаемого с $n = 0$, зануляются в силу того, что $\hat{a}|0\rangle = 0$. Следовательно,

$$e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle. \quad (2.3.23)$$

Разложим затем в ряд Тэйлора следующую экспоненту (содержащую \hat{a}^\dagger), получим искомое представление когерентного состояния через $|n\rangle$ -состояния:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n (\hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.3.24)$$

Следовательно, распределение вероятностей для числа квантов в когерентном состоянии является пуассоновским:

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (2.3.25)$$

Среднее значение и дисперсия числа квантов в этом состоянии равны

$$\langle n\rangle = \langle \alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2, \quad (2.3.26a)$$

$$\Delta_n^2 = \langle \alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle - \langle \alpha|\hat{n}|\alpha\rangle^2 = |\alpha|^2. \quad (2.3.26b)$$

Линейная алгебра Когерентные состояния являются собственными для оператора уничтожения квантов, с собственным значением α . Действительно,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{a}|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.3.27)$$

Если бы оператор \hat{a} был эрмитовым, то отсюда следовала бы ортогональность набора когерентных состояний. Однако оператор \hat{a} неэрмитов, и когерентные состояния неортогональны друг к другу:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \beta \rangle &= \sum_{n, n'=0}^{\infty} \frac{e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} (\alpha^*)^n \beta^{n'}}{\sqrt{n! n'}} \langle n | n' \rangle = \sum_n \frac{e^{-(|\alpha|^2 - |\beta|^2)/2} (\alpha^* \beta)^n}{n!} \\ &= \exp\left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 + 2\alpha^* \beta}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

и

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}. \quad (2.3.29)$$

В то же время, когерентных состояний является полным:

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_{n, n'=0}^{\infty} \int d^2\alpha \frac{e^{-|\alpha|^2} \alpha^n (\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n! n'}} |n\rangle \langle n'| \quad (2.3.30)$$

Для вычисления интеграла удобно перейти к полярным координатам, положив $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ и $d^2\alpha = |\alpha|d|\alpha|d\phi$:

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha &= \sum_{n, n'=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |\alpha| d|\alpha| \int_{2\pi} d\phi \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{n+n'} e^{i\phi(n-n')}}{\sqrt{n! n'}} |n\rangle \langle n'| \\ &= 2\pi \sum_{n, n'=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |\alpha| d|\alpha| \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{n+n'} \delta_{nn'}}{\sqrt{n! n'}} |n\rangle \langle n'| = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| \int_0^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!} |\alpha| d|\alpha| \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \pi. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Следовательно,

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = 1. \quad (2.3.32)$$

Следовательно, по набору когерентных состояний можно раскладывать другие волновые функции, точно так же, как любой вектор в обычном трехмерном пространстве можно разложить по любой тройке некопланарных векторов (не обязательно ортогональных). Например,

$$|n\rangle = \int \frac{e^{-|\alpha|^2/2} (\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} |\alpha\rangle \frac{d^2\alpha}{\pi}. \quad (2.3.33)$$

2.3.4 Нормальное упорядочивание операторов

То обстоятельство, что $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, позволяет использовать для вычислений средних значений различных операторов технику, основанную на т.н. *нормальном упорядочивании* операторов \hat{a} и \hat{a}^\dagger .

Пусть имеется некоторый оператор \mathcal{F} , представляющий функцию от операторов рождения и уничтожения:

$$\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger). \quad (2.3.34)$$

Очевидно, для осциллятора любая наблюдаемая может быть представлена в виде функции от координаты и импульса, а следовательно и от операторов \hat{a} и \hat{a}^\dagger .

Используя коммутатор (2.1.9), эту функцию можно переписать так, чтобы все операторы \hat{a} находились справа от операторов \hat{a}^\dagger :

$$\hat{\mathcal{F}} = \sum_{n,n'}^{\infty} \mathcal{F}_{nn'}(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^{n'}. \quad (2.3.35)$$

Такая форма записи называется нормально упорядоченной. Например, для энергии гармонического осциллятора форма записи

$$\hbar\mathcal{E} = \frac{\hbar\omega_o}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (2.3.36)$$

не является нормально упорядоченной, а форма

$$\mathcal{E} = \hbar\omega_o(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2) \quad (2.3.37)$$

является.

Для нормально упорядоченной формы записи вычисление среднего становится тривиальным:

$$\langle \alpha | \hat{\mathcal{F}} | \alpha \rangle = \sum_{n,n'}^{\infty} \mathcal{F}_{nn'} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^{n'} | \alpha \rangle = \sum_{n,n'}^{\infty} \mathcal{F}_{nn'} (\alpha^*)^n \alpha^{n'}. \quad (2.3.38)$$

То есть все операторы \hat{a} просто заменяются на α , а операторы \hat{a}^\dagger — на α^* .

Рассмотрим простой пример. Вычислим среднее значение квадрата оператора числа квантов в когерентном состоянии $\langle \alpha |$. Вычисление производится в три приема.

1. Представим искомый оператор в виде функции от операторов рождения и уничтожения:

$$\hat{n}^2 = \hat{n}\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (2.3.39)$$

2. Приведем эту запись к нормально упорядоченному виду:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)\hat{a} = (\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (2.3.40)$$

3. Заменим все \hat{a} на α , а \hat{a}^\dagger — на α^* , в итоге получим $\langle n \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2$.

2.4 Сжатые состояния

2.4.1 Параметрическое возбуждение осциллятора

Помимо возбуждения осциллятора с помощью классической силы, которое переводит его из нулевого в когерентное состояние, возможен еще один метод возбуждения: параметрический, когда какой-либо из параметров осциллятора (например, жесткость) меняется по заданному закону.

Как известно из теории колебаний, наиболее эффективно возбуждение происходит, когда частота изменения параметра равна удвоенной собственной частоте осциллятора. Рассмотрим уравнение движения для такого осциллятора в картине эволюции Гейзенберга:

$$\frac{d^2\hat{q}_\Gamma(t)}{dt^2} + \omega_o^2(1 + k \sin 2\omega_o t)\hat{q}_\Gamma(t) = 0. \quad (2.4.1)$$

Оно является линейным, и поэтому его можно решать точно так же, как соответствующее уравнение в классическом случае: методом медленно меняющихся амплитуд (ММА).

Положим

$$\hat{q}_\Gamma(t) = \hat{q}_C(t) \cos \omega_o t + \hat{q}_S(t) \sin \omega_o t, \quad (2.4.2a)$$

$$\frac{d\hat{q}_\Gamma(t)}{dt} = \omega_o(-\hat{q}_C(t) \sin \omega_o t + \hat{q}_S(t) \cos \omega_o t), \quad (2.4.2b)$$

где $q_S(t), q_C(t)$ — новые неизвестные (операторные) функции. Отметим, что эти новые переменные почти, но не совсем точно совпадают с квадратурными амплитудами (2.2.11). Однако после приближения, которое будет сделано чуть ниже, они превратятся в квадратурные амплитуды, и поэтому для них выбраны те же обозначения.

Из последних уравнений следует, что

$$\frac{d\hat{q}_C(t)}{dt} \cos \omega_o t + \frac{d\hat{q}_S(t)}{dt} \sin \omega_o t = 0, \quad (2.4.3a)$$

а их подстановка в уравнение (2.4.1) дает:

$$-\frac{d\hat{q}_C(t)}{dt} \sin \omega_o t + \frac{d\hat{q}_S(t)}{dt} \cos \omega_o t + \omega_o k \sin 2\omega_o t (\hat{q}_C(t) \cos \omega_o t + \hat{q}_S(t) \sin \omega_o t) = 0. \quad (2.4.3b)$$

Комбинируя между собой уравнения (2.4.3), получить следующие уравнения:

$$\frac{d\hat{q}_C(t)}{dt} - \omega_o k \sin 2\omega_o t \sin \omega_o t (\hat{q}_C(t) \cos \omega_o t + \hat{q}_S(t) \sin \omega_o t) = 0, \quad (2.4.4a)$$

$$\frac{d\hat{q}_S(t)}{dt} + \omega_o k \sin 2\omega_o t \cos \omega_o t (\hat{q}_C(t) \cos \omega_o t + \hat{q}_S(t) \sin \omega_o t) = 0. \quad (2.4.4b)$$

До сих пор все выкладки были точными. Теперь предположим, что переменные $q_S(t), q_C(t)$ меняются медленно по сравнению с собственной частотой ω_o (для этого

необходимо, чтобы параметр k был мал). В этом случае в последних уравнениях можно пренебречь быстро осциллирующими слагаемыми. В итоге мы получим т.н. *укороченные уравнения*:

$$\frac{d\hat{q}_c(t)}{dt} - \gamma\hat{q}_c(t) = 0, \quad (2.4.5a)$$

$$\frac{d\hat{q}_s(t)}{dt} + \gamma\hat{q}_s(t) = 0, \quad (2.4.5b)$$

где $\gamma = k\omega_0/4$. Решение этих уравнений очевидно:

$$\hat{q}_c(t) = \hat{q}_c(0)e^{\gamma t}, \quad (2.4.6a)$$

$$\hat{q}_s(t) = \hat{q}_s(0)e^{-\gamma t}. \quad (2.4.6b)$$

Отсюда нетрудно найти, как меняются со временем средние значения:

$$\langle q_c(t) \rangle = \langle q_c(0) \rangle e^{\gamma t}, \quad (2.4.7a)$$

$$\langle q_s(t) \rangle = \langle q_s(0) \rangle e^{-\gamma t}. \quad (2.4.7b)$$

и вторые моменты квадратурных амплитуд:

$$\Delta_{q_c}^2(t) = \Delta_{q_c}^2 e^{2\gamma t}, \quad (2.4.8a)$$

$$\Delta_{q_s}^2(t) = \Delta_{q_s}^2 e^{-2\gamma t}, \quad (2.4.8b)$$

$$\Delta_{q_c p_s}(t) = \Delta_{q_c p_s}(0). \quad (2.4.8c)$$

Таким образом, под действием параметрического возбуждения одна из квадратурных амплитуд (при $\gamma > 0$ это q_c , при $\gamma < 0$ — q_s) экспоненциально “разбухает” (пропорционально растут как ее среднее значение, так и дисперсия), а другая в том же темпе “сжимается”. Произведение дисперсий при этом не изменяется.

Пусть в начальный момент времени осциллятор был в нулевом состоянии. Тогда через время t дисперсии квадратурных амплитуд будут равны

$$\Delta_{q_c}^2(t) = \frac{\hbar}{2\rho} e^{2\gamma t}, \quad (2.4.9a)$$

$$\Delta_{q_s}^2(t) = \frac{\hbar}{2\rho} e^{-2\gamma t}. \quad (2.4.9b)$$

Из того факта, что произведение дисперсий по прежнему равно минимально возможному значению $\hbar^2/4\rho^2$, следует, что волновая функция получившегося состояния в координатном и импульсном представлениях продолжает оставаться гауссовской. Такое квантовое состояние носит специальное название *сжатого вакуумного состояния*.

Возможен, естественно, и более общий случай, когда вначале осциллятор находился в когерентном состоянии. В этом случае дисперсии квадратурных амплитуд будут также описываться формулами (2.4.9), но их средние значения будут отличны от нуля и меняться во времени, как обычно, в соответствии с классическими уравнениями движения. Такие состояния называются просто *сжатыми*.

2.4.2 Оператор сжатия

Точно так же, как воздействие классической силы на осциллятор описывается при помощи унитарного оператора сдвига $\hat{D}(\alpha)$, параметрическое воздействие может быть описано при помощи унитарного оператора сжатия

$$\hat{S}(z) = e^{\frac{1}{2}[z(\hat{a}^\dagger)^2 - z^* \hat{a}^2]}. \quad (2.4.10)$$

Его комплексный параметр z задает как степень сжатия, так и его фазу (то есть фазу параметрической накачки).

Рассмотрим сначала более простой случай, когда этот параметр является действительным числом R :

$$\hat{S}(R) = e^{\frac{R}{2}[(\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}^2]}. \quad (2.4.11)$$

Найдем, как действует такой оператор эволюции на оператор уничтожения квантов \hat{a} , то есть вычислим выражение $\hat{S}^\dagger(R)\hat{a}\hat{S}(R)$. Используя теорему 9, при $\xi = R$ и $\hat{P} = [\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2]/2$, получим, что

$$\hat{S}^\dagger(R)\hat{a}\hat{S}(R) = \hat{a} + R \left[\frac{\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2}{2}, \hat{a} \right] + \dots + \frac{R^n}{n!} \left[\frac{\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2}{2}, \dots, \underbrace{\left[\frac{\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2}{2}, \hat{a} \right]}_{n \text{ раз}} \dots \right] + \dots \quad (2.4.12)$$

Входящие в эту формулу многократные коммутаторы легко вычисляются с помощью соотношений

$$\left[\frac{\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2}{2}, \hat{a} \right] = \hat{a}^\dagger, \quad \left[\frac{\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2}{2}, \hat{a}^\dagger \right] = \hat{a}. \quad (2.4.13)$$

Из них следует, что все коммутаторы нечетного порядка равны \hat{a}^\dagger , а четного — \hat{a} , и, следовательно,

$$\hat{S}^\dagger(R)\hat{a}\hat{S}(R) = \hat{a} + R\hat{a}^\dagger + \frac{R^2}{2!}\hat{a} + \frac{R^3}{3!}\hat{a}^\dagger + \dots = \hat{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^{2k}}{(2k)!} + \hat{a}^\dagger \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (2.4.14)$$

Получившиеся суммы представляют собой разложения в ряд для гиперболических синуса и косинуса, следовательно,

$$\hat{S}^\dagger(R)\hat{a}\hat{S}(R) = \hat{a} \operatorname{ch} R + \hat{a}^\dagger \operatorname{sh} R. \quad (2.4.15a)$$

Эрмитовое сопряжение этой формулы дает соответствующее выражение для оператора рождения квантов:

$$\hat{S}^\dagger(R)\hat{a}^\dagger\hat{S}(R) = \hat{a}^\dagger \operatorname{ch} R + \hat{a} \operatorname{sh} R. \quad (2.4.15b)$$

Отсюда легко найти, как оператор сжатия действует на координату и импульс осциллятора:

$$\hat{S}^\dagger(\mathbf{R})\hat{x}\hat{S}(\mathbf{R}) = \frac{q_0}{\sqrt{2}}\hat{S}^\dagger(\mathbf{R})(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\hat{S}(\mathbf{R}) = \frac{q_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\text{ch } \mathbf{R} + \text{sh } \mathbf{R}) = \hat{x}e^{\mathbf{R}}, \quad (2.4.16a)$$

$$\hat{S}^\dagger(\mathbf{R})\hat{p}\hat{S}(\mathbf{R}) = \frac{q_0 p}{i\sqrt{2}}\hat{S}^\dagger(\mathbf{R})(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\hat{S}(\mathbf{R}) = \frac{q_0 p}{i\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)(\text{ch } \mathbf{R} - \text{sh } \mathbf{R}) = \hat{p}e^{-\mathbf{R}}. \quad (2.4.16b)$$

Сравнивая эти формулы с формулами (2.4.6), мы видим, что оператор сжатия действительно описывает изменение состояния осциллятора при параметрическом воздействии, причем параметр \mathbf{R} равен γt .

Чтобы обобщить полученные результаты на случай произвольных комплексных значений параметра сжатия, удобно воспользоваться следующей формулой:

$$\hat{\mathcal{R}}^\dagger(\theta)\hat{S}(\mathbf{R})\hat{\mathcal{R}}(\theta) = \hat{S}(\mathbf{R}e^{2i\theta}), \quad (2.4.17)$$

Она легко доказывается с помощью теоремы 8 и формул (2.1.36). Следовательно, оператор сжатия с произвольным комплексным параметром сжатия $z = \mathbf{R}e^{2i\theta}$ может быть представлен комбинации (2.4.17).

Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(z)\hat{a}\hat{S}(z) &= \hat{\mathcal{R}}^\dagger(\theta)\hat{S}^\dagger(\mathbf{R})\hat{\mathcal{R}}(\theta)\hat{a}\hat{\mathcal{R}}^\dagger(\theta)\hat{S}(\mathbf{R})\hat{\mathcal{R}}(\theta) = \hat{\mathcal{R}}^\dagger(\theta)\hat{S}^\dagger(\mathbf{R})\hat{a}e^{i\theta}\hat{S}(\mathbf{R})\hat{\mathcal{R}}(\theta) \\ &= \hat{\mathcal{R}}^\dagger(\theta)(\hat{a}\text{ch } \mathbf{R} + \hat{a}^\dagger\text{sh } \mathbf{R})\hat{\mathcal{R}}(\theta)e^{i\theta} = (\hat{a}e^{-i\theta}\text{ch } \mathbf{R} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}\text{sh } \mathbf{R})e^{i\theta} \\ &= \hat{a}\text{ch } \mathbf{R} + \hat{a}^\dagger e^{2i\theta}\text{sh } \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (2.4.18a)$$

и, соответственно,

$$\hat{S}^\dagger(z)\hat{a}^\dagger\hat{S}(z) = \hat{a}^\dagger\text{ch } \mathbf{R} + \hat{a}e^{-2i\theta}\text{sh } \mathbf{R}. \quad (2.4.18b)$$

3 Квантовые распределенные системы

3.1 Двухпроводная линия

3.1.1 Напоминание из курса радиофизики

Двухпроводная линия является очень удобной моделью, на которой можно наглядно продемонстрировать методы работы с распределенными системами, не связываясь при этом со сложностями, не имеющими прямого отношения к квантовой механике — например, с векторным анализом.

Колебания в длинной линии описываются телеграфными уравнениями:

$$L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}, \quad (3.1.1a)$$

$$C \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial I(x, t)}{\partial x}, \quad (3.1.1b)$$

где $U(x, t)$ — напряжение, $I(x, t)$ — ток, L — погонная индуктивность, C — погонная емкость. Как правило, вместо параметров L и C удобно использовать другие однозначно связанные с ними параметры — волновое сопротивление

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.1.2)$$

и скорость распространения волны в линии

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.1.3)$$

Вид решения телеграфных уравнений зависит от граничных условий. Мы будем использовать циклические граничные условия, так как от них потом легко перейти к случаю бесконечной линии. Положим, что для любого момента времени t

$$U(X, t) = U(0, t), \quad (3.1.4a)$$

$$I(X, t) = I(0, t), \quad (3.1.4b)$$

где X — длина линии. Тогда общее решение можно записать в виде разложения по собственным модам колебаний:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(U_n^c(t) \cos k_n x + U_n^s(t) \sin k_n x \right), \quad (3.1.5a)$$

$$I(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-I_n^s(t) \cos k_n x + I_n^c(t) \sin k_n x \right), \quad (3.1.5b)$$

где

$$k_n = \frac{2\pi n}{X} = \frac{\omega_n}{v}, \quad (3.1.6)$$

ω_n — собственные частоты мод, а $U_n^c(t)$, $U_n^s(t)$, $I_n^c(t)$, $I_n^s(t)$ — новые неизвестные функции.

Подставив это решение в уравнение линии (3.1.1), получим уравнения для $U_n^{c,s}$, $I_n^{c,s}$:

$$\frac{dU_n^c(t)}{dt} = -\rho\omega_n I_n^c(t), \quad (3.1.7a)$$

$$\frac{dI_n^c(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\rho} U_n^c(t), \quad (3.1.7b)$$

$$\frac{dU_n^s(t)}{dt} = -\rho\omega_n I_n^s(t), \quad (3.1.7c)$$

$$\frac{dI_n^s(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\rho} U_n^s(t), \quad (3.1.7d)$$

или

$$\frac{d^2 U_n^c(t)}{dt^2} + \omega_n^2 U_n^c(t) = 0, \quad (3.1.8a)$$

$$\frac{d^2 U_n^s(t)}{dt^2} + \omega_n^2 U_n^s(t) = 0. \quad (3.1.8b)$$

то есть получился набор осцилляторных уравнений.

3.1.2 Квантование длинной линии

Общая логика квантования любых физических систем, в том числе и двухпроводной линии, сводится к следующим шагам:

1. Выписывается лагранжиан системы \mathcal{L} , как функция ее обобщенных координат q_1, q_2, \dots .
2. Вычисляются соответствующие обобщенные импульсы, по обычному классическому правилу $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$.
3. Строится функция Гамильтона системы, опять же по обычному классическому правилу $\mathcal{H} = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$.
4. Обобщенные координаты и импульсы в функции Гамильтона заменяются на операторы, удовлетворяющими соотношениям коммутации $[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$. В итоге получается квантовый оператор Гамильтона $\hat{\mathcal{H}}$, из которого уже можно найти уравнение Шредингера, уравнения движения для операторов в картине Гейзенберга и т.д.

Проделаем эти шаги для двухпроводной линии. Запишем выражение для ее энергии:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^x (LI(x, t)^2 + CU(x, t)^2) dx. \quad (3.1.9)$$

Подставим сюда решение (3.1.5) и проинтегрируем по x . С учетом того, что

$$\int_0^X \cos k_n x \cos k_m x dx = \int_0^X \sin k_n x \sin k_m x dx = \frac{X}{2} \delta_{nm}, \quad (3.1.10a)$$

$$\int_0^X \cos k_n x \sin k_m x dx = 0, \quad (3.1.10b)$$

все перекрестные члены уйдут, и получится:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^c + \mathcal{E}^s, \quad (3.1.11)$$

где

$$\mathcal{E}^{c,s} = \frac{CX}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\dot{U}_n^{c,s})^2}{\omega_n^2} + (U_n^{c,s})^2 \right) \quad (3.1.12)$$

— энергии “косинусных” и “синусных” мод колебаний.

Объявляем часть, содержащую производные по времени, кинетической энергией, а остальную энергию — потенциальной. В качестве обобщенной координат выберем величины

$$q_n^{c,s} = \sqrt{\frac{C_n CX}{2}} U_n^{c,s}. \quad (3.1.13)$$

где C_n — произвольные константы. Удобно, но не обязательно, чтобы они имели размерность емкости, тогда обобщенные координаты будут, как и для обычного сосредоточенного LC-контура, иметь размерность заряда, а обобщенные импульсы — размерность магнитного потока.

Выписываем лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^c + \mathcal{L}^s, \quad (3.1.14)$$

где

$$\mathcal{L}^{c,s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L_n (\dot{q}_n^{c,s})^2}{2} - \frac{(q_n^{c,s})^2}{2C_n} \right), \quad (3.1.15)$$

а $L_n = 1/C_n \omega_n^2$.

Находим обобщенные импульсы:

$$\Phi_n^{c,s} = \frac{\partial \mathcal{L}^{c,s}}{\partial \dot{q}_n^{c,s}} = L_n \dot{q}_n^{c,s}, \quad (3.1.16)$$

и получаем гамильтониан системы:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_s, \quad (3.1.17)$$

где

$$\mathcal{H}_{c,s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{c,s} \dot{q}_n^{c,s} - \mathcal{L}_{c,s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\Phi_n^{c,s})^2}{2L_n} + \frac{(q_n^{c,s})^2}{2C_n} \right). \quad (3.1.18)$$

Теперь можно объявить обобщенные координаты и обобщенные импульсы операторами, удовлетворяющим условиям коммутации

$$[\hat{q}_n^c, \hat{\Phi}_m^c] = [\hat{q}_n^s, \hat{\Phi}_m^s] = i\hbar\delta_{nm}, \quad (3.1.19a)$$

$$[\hat{q}_n^c, \hat{\Phi}_m^s] = [\hat{q}_n^s, \hat{\Phi}_m^c] = 0, \quad (3.1.19b)$$

и получить оператор Гамильтона длинной линии:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_c + \hat{\mathcal{H}}_s, \quad (3.1.20)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_{c,s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\hat{\Phi}_n^{c,s})^2}{2L_n} + \frac{(\hat{q}_n^{c,s})^2}{2C_n} \right). \quad (3.1.21)$$

3.1.3 Операторы рождения и уничтожения для стоячих и бегущих волн

Как правило, при рассмотрении распределенных квантовых систем используют не обобщенные координаты и импульсы, а операторы рождения и уничтожения квантов. Для стоячих (косинусных и синусных) мод они вводятся по тем же правилам, что и для обычных осцилляторов (см. раздел 2.1.1):

$$\hat{q}_n^{c,s} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_n C_n}{2}} (\hat{a}_{nc,s} + \hat{a}_{nc,s}^+), \quad (3.1.22a)$$

$$\hat{\Phi}_n^{c,s} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n C_n}} \frac{\hat{a}_{nc,s} - \hat{a}_{nc,s}^+}{i}, \quad (3.1.22b)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{c,s} = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar\omega_n (\hat{a}_{nc,s} \hat{a}_{nc,s}^+ + \hat{a}_{nc,s}^+ \hat{a}_{nc,s}). \quad (3.1.22c)$$

Для них (в картине Гейзенберга) справедливы обычные уравнения движения

$$\frac{d\hat{a}_{nc,s}(t)}{dt} = -i\omega_n \hat{a}_{nc,s}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{a}_{nc,s}(t) = \hat{a}_{nc,s} e^{-i\omega_n t}, \quad (3.1.23)$$

вытекающие из уравнений движения для длинной линии (3.1.8).

Операторы рождения и уничтожения, относящиеся к разным модам, коммутируют, а для одной и той-же моды — подчиняются обычному соотношению коммутации:

$$[\hat{a}_{nc}, \hat{a}_{nc}^+] = [\hat{a}_{ms}, \hat{a}_{ns}^+] = \delta_{nm}, \quad (3.1.24a)$$

$$[\hat{a}_{nc}, \hat{a}_{ns}^+] = [\hat{a}_{ms}, \hat{a}_{nc}^+] = 0. \quad (3.1.24b)$$

Операторы напряжения и тока в линии, выраженные через операторы рождения и уничтожения, принимают вид:

$$\hat{U}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{CX}} \left[\left(\hat{a}_{nc} e^{-i\omega_n t} + \hat{a}_{nc}^+ e^{i\omega_n t} \right) \cos k_n x \right. \\ \left. + \left(\hat{a}_{ns} e^{-i\omega_n t} + \hat{a}_{ns}^+ e^{i\omega_n t} \right) \sin k_n x \right], \quad (3.1.25a)$$

$$\hat{I}(x, t) = -\frac{1}{i\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{CX}} \left[\left(\hat{a}_{nc} e^{-i\omega_n t} - \hat{a}_{nc}^+ e^{i\omega_n t} \right) \sin k_n x \right. \\ \left. + \left(\hat{a}_{ns} e^{-i\omega_n t} - \hat{a}_{ns}^+ e^{i\omega_n t} \right) \cos k_n x \right]. \quad (3.1.25b)$$

(отметим, что произвольные константы C_n выпали).

От стоячих волн (косинусной и синусной) часто бывает удобнее перейти к бегущим. Операторы рождения и уничтожения для волн, бегущих вправо и влево (будем обозначать их индексами R и L) вводятся по правилам:

$$\hat{a}_{nR} = \frac{a_{nc} - ia_{ns}}{\sqrt{2}}, \quad (3.1.26a)$$

$$\hat{a}_{nR}^+ = \frac{a_{nc}^+ + ia_{ns}^+}{\sqrt{2}}, \quad (3.1.26b)$$

$$\hat{a}_{nL} = \frac{a_{nc} + ia_{ns}}{\sqrt{2}}, \quad (3.1.26c)$$

$$\hat{a}_{nL}^+ = \frac{a_{nc}^+ - ia_{ns}^+}{\sqrt{2}}. \quad (3.1.26d)$$

Из формул (3.1.24) следует, что для них справедливы коммутаторы

$$[\hat{a}_{nR}, \hat{a}_{nR}^+] = [\hat{a}_{mL}, \hat{a}_{nL}^+] = \delta_{nm}, \quad (3.1.27a)$$

$$[\hat{a}_{nR}, \hat{a}_{nL}^+] = [\hat{a}_{mL}, \hat{a}_{nR}^+] = 0. \quad (3.1.27b)$$

Перейдя в формулах для напряжения и тока в линии от операторов \hat{a}_{nc} , \hat{a}_{ns} , \hat{a}_{nc}^+ , \hat{a}_{ns}^+ к операторам \hat{a}_{nR} , \hat{a}_{nL} , \hat{a}_{nR}^+ , \hat{a}_{nL}^+ , получим:

$$\hat{U}(x, t) = \hat{U}_R(x - vt) + U_L(x + vt), \quad (3.1.28a)$$

$$\hat{I}(x, t) = \frac{1}{\rho} \left(\hat{U}_R(x - vt) - U_L(x + vt) \right), \quad (3.1.28b)$$

где

$$\hat{U}_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2CX}} \left(a_{nR} e^{ik_n x} + a_{nR}^+ e^{-ik_n x} \right), \quad (3.1.29a)$$

$$\hat{U}_L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2CX}} \left(a_{nL} e^{-ik_n x} + a_{nL}^+ e^{ik_n x} \right). \quad (3.1.29b)$$

— волны, бегущие вправо и влево, соответственно.

3.1.4 Переход к бесконечной линии

Перейдем теперь к пределу бесконечной линии: $X \rightarrow \infty$. Для упрощения формул, будем рассматривать только волну, бегущую направо, опуская индекс R .

Очевидно, что надо во всех полученных выражениях от сумм по модам перейти к интегралам по частотам. Это не составляет проблемы, если суммируются числа f_n (а не операторы):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightarrow \int_0^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\delta\omega} = \frac{X}{v} \int_0^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.1.30)$$

где

$$\delta\omega = \frac{2\pi v}{X} \quad (3.1.31)$$

— расстояние между модами, а функция $f(\omega)$ определена по правилу

$$f(\omega_n) = f_n, \quad (3.1.32)$$

с заполнением по непрерывности при остальных значениях ω .

Однако для операторов здесь нужно соблюдать некоторую аккуратность. Будем исходить из правила:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \hat{a}_n \rightarrow \int_0^{\infty} f(\omega) \hat{a}(\omega) J(\omega) d\omega, \quad (3.1.33)$$

где $J(\omega)$ — функция, которую предстоит определить, а $\hat{a}(\omega)$ — оператор уничтожения для непрерывного спектра мод. Положим по аналогии с формулами (3.1.27), что он (вместе с парным оператором рождения $\hat{a}^+(\omega)$) удовлетворяет соотношению коммутации

$$[\hat{a}(\omega), \hat{a}^+(\omega')] = 2\pi\delta(\omega - \omega') \quad (3.1.34)$$

Множитель 2π здесь введен исключительно из удобства (при таком определении операторов $\hat{a}(\omega), \hat{a}^+(\omega)$ многие формулы выглядят проще). Часто используется и другая нормировка, без 2π :

$$[\hat{a}(\omega), \hat{a}^+(\omega')] = \delta(\omega - \omega'). \quad (3.1.35)$$

Однако мы будем использовать нормировку (3.1.34).

Вычислим теперь коммутатор

$$S = \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n \hat{a}_n, \sum_{m=1}^{\infty} g_m \hat{a}_m^+ \right]. \quad (3.1.36)$$

С одной стороны,

$$S = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_n g_m [\hat{a}_n, \hat{a}_m^+] = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_n g_m \delta_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightarrow \int_0^{\infty} f(\omega) g(\omega) \frac{d\omega}{\delta\omega}. \quad (3.1.37)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow \left[\int_0^\infty f(\omega) \hat{a}(\omega) J(\omega) d\omega, \int_0^\infty g(\omega) \hat{a}^+(\omega) J(\omega) d\omega \right] \\
&= \int_0^\infty f(\omega) g(\omega') [\hat{a}(\omega), \hat{a}^+(\omega')] J(\omega) J(\omega') d\omega d\omega' \\
&= 2\pi \int_0^\infty f(\omega) g(\omega') \delta(\omega - \omega') J(\omega) J(\omega') d\omega d\omega' \\
&= 2\pi \int_0^\infty f(\omega) g(\omega) J^2(\omega) d\omega. \quad (3.1.38)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$J(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi \delta\omega}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{X}{v}}, \quad (3.1.39)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \hat{a}_n \rightarrow \sqrt{\frac{X}{v}} \int_0^\infty f(\omega) \hat{a}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.1.40)$$

Теперь можно перейти к пределу бесконечной линии в формулах (3.1.29):

$$\hat{U}_R(x) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega\rho}{2}} \left(\hat{a}_R(\omega) e^{i\omega x/v} + \hat{a}_R^+(\omega) e^{-i\omega x/v} \right) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.1.41a)$$

$$\hat{U}_L(x) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega\rho}{2}} \left(\hat{a}_L(\omega) e^{-i\omega x/v} + \hat{a}_L^+(\omega) e^{i\omega x/v} \right) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.1.41b)$$

3.1.5 Энергия и плотность энергии

Используя полученные выражения, можно вычислить любые другие наблюдаемые для длинной линии. В частности, позже нам потребуются формулы для энергии и плотности энергии в линии.

Плотность энергии равна

$$\hat{\varepsilon} = \left(\frac{C\hat{U}^2(x, t)}{2} + \frac{L\hat{I}^2(x, t)}{2} \right) dx = \hat{\varepsilon}_R + \hat{\varepsilon}_L, \quad (3.1.42)$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{R,L} = C\mathcal{U}_R^2(x) \quad (3.1.43)$$

— плотности энергии в модах, бегущих направо и налево, соответственно.

Рассмотрим волну, бегущую, например, направо. Для упрощения формул будем опускать индексы “R”. Плотность энергии равна

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}(x) &= \int_0^\infty \frac{\hbar\sqrt{\omega\omega'}}{2v} \left(\hat{a}(\omega) \hat{a}^+(\omega') e^{i(\omega-\omega')x/v} + \hat{a}^+(\omega) \hat{a}(\omega') e^{i(\omega'-\omega)x/v} \right. \\
&\quad \left. + \hat{a}(\omega) \hat{a}(\omega') e^{i(\omega+\omega')x/v} + \hat{a}^+(\omega) \hat{a}^+(\omega') e^{-i(\omega'+\omega)x/v} \right) \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}. \quad (3.1.44)
\end{aligned}$$

Приведем ее к нормально упорядоченному виду (так, чтобы все операторы рождения были слева от операторов уничтожения):

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}(x) &= \int_0^\infty \frac{\hbar\sqrt{\omega\omega'}}{2v} \left[\left(\hat{a}^+(\omega')\hat{a}(\omega) + 2\pi\delta(\omega-\omega') \right) e^{i(\omega-\omega')x/v} + \hat{a}^+(\omega)\hat{a}(\omega') e^{i(\omega'-\omega)x/v} \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}(\omega)\hat{a}(\omega') e^{i(\omega+\omega')x/v} + \hat{a}^+(\omega)\hat{a}^+(\omega') e^{-i(\omega'+\omega)x/v} \right] \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \\ &= \hat{\varepsilon}^{(N)}(x) + \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{2v} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.1.45)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}^{(N)}(x) &= \int_0^\infty \frac{\hbar\sqrt{\omega\omega'}}{2v} \left(2\hat{a}^+(\omega)\hat{a}(\omega') e^{i(\omega'-\omega)x/v} \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}(\omega)\hat{a}(\omega') e^{i(\omega+\omega')x/v} + \hat{a}^+(\omega)\hat{a}^+(\omega') e^{-i(\omega'+\omega)x/v} \right) \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \quad (3.1.46)\end{aligned}$$

— нормально упорядоченная часть плотности энергии.

Обратим внимание на последнее слагаемое в формуле (3.1.45), которое соответствует плотности энергии нулевого состояния. Легко видеть, что оно расходится. Следовательно, даже в состоянии с наиминимальшей энергией плотность энергии в каждой точке длинной линии бесконечна. То же, естественно, справедливо и для любых других распределенных систем.

Как правило, эту бесконечную энергию в выкладках отбрасывают и берут вместо полной энергии и плотности энергии их нормально упорядоченные части (перенормировка). Однако есть круг физических явлений (который будет рассмотрен в следующем разделе), в котором нулевая энергия играет принципиальную роль.

Вычислим в заключение нормально упорядоченную часть полной энергии:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}^{(N)} &= \int_{-\infty}^\infty \varepsilon^{(N)}(x) dx = \int_0^\infty \frac{\hbar\sqrt{\omega\omega'}}{2} \left[2\hat{a}^+(\omega)\hat{a}(\omega')\delta(\omega-\omega') \right. \\ &\quad \left. + \left(\hat{a}(\omega)\hat{a}(\omega') + \hat{a}^+(\omega)\hat{a}^+(\omega') \right) \delta(\omega+\omega') \right] \frac{d\omega d\omega'}{2\pi} \\ &= \int_0^\infty \hbar\omega \hat{a}^+(\omega)\hat{a}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.1.47)\end{aligned}$$

3.1.6 Плоская волна в пространстве

Аналогичным образом, исходя из уравнений Максвелла вместо телеграфных уравнений, можно проквантовать и э.м. волну, распространяющуюся в пространстве. Однако можно использовать и более простой прием. В квантовой оптике часто используется приближение “почти плоской” волны, когда зависимостью напряженностей полей от координат y и z , ортогональных к направлению распространения волны z , пренебрегают.

В этом случае можно использовать аналогию между плотностью энергии в линии и линейной плотностью энергии в электромагнитной волне:

$$\frac{cU^2}{2} \leftrightarrow \int \frac{E^2}{8\pi} ds = \frac{E^2 \mathcal{A}}{8\pi}, \quad (3.1.48)$$

где E — напряженность поля (интеграл берется по поперечному сечению волны, \mathcal{A} — площадь ее сечения). Следовательно, справедлива аналогия

$$E \leftrightarrow \sqrt{\frac{4\pi c}{\mathcal{A}}} U = \sqrt{\frac{4\pi}{\mathcal{A} \rho c}} U. \quad (3.1.49)$$

где $c = v$ — скорость света. Отсюда получаем, что для волны, бегущей, например, вправо,

$$\hat{E}_R(x) = \sqrt{\frac{4\pi}{\mathcal{A} \rho c}} \hat{U}_R(x) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega}{\mathcal{A} c}} \left(\hat{a}_R(\omega) e^{i\omega x/c} + \hat{a}_R^\dagger(\omega) e^{-i\omega x/c} \right) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.1.50)$$

Остается только учесть, что напряженность поля в плоской волне является вектором, ортогональным направлению распространения волны:

$$\vec{\hat{E}}(x) = \sum_{\sigma=1,2} \vec{n}_\sigma \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega}{\mathcal{A} c}} \left(\hat{a}_\sigma(\omega) e^{i\omega x/c} + \hat{a}_\sigma^\dagger(\omega) e^{-i\omega x/c} \right) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.1.51)$$

где \vec{n}_1, \vec{n}_2 — единичные векторы, задающие две поляризации волны. Например,

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_y, \quad \vec{n}_2 = \vec{n}_z \quad (3.1.52)$$

для линейных поляризаций или

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{n}_y + i\vec{n}_z}{\sqrt{2}}, \quad \vec{n}_2 = \frac{\vec{n}_y - i\vec{n}_z}{\sqrt{2}} \quad (3.1.53)$$

для циркулярных.

3.2 Нулевое состояние в распределенных системах

В распределенных системах нулевое состояние $|0\rangle$ хотя и является простейшим из всех возможных, обладает целым рядом нетривиальных свойств. Часть из них будет рассмотрена в данном разделе.

Начнем с плотности энергии нулевых колебаний. Как было показано в прошлом разделе, она бесконечна в каждой точке пространства. Как правило, во всех расчетах эту бесконечную энергию вычитают из полной энергии (выполняют перенормировку), пользуясь тем, что энергию можно отсчитывать от произвольного уровня, и затем забывают про нее. Однако есть случаи, когда эта энергия непосредственно проявляет себя.

Эффект Казимира Сила Казимира является наиболее известным из подобных эффектов. Она возникает из-за того, что электромагнитная энергия давит на металлическую поверхность, и это давление пропорционально плотности электромагнитной энергии. Если взять просто металлическую пластинку, то давление нулевых колебаний на нее обнаружить невозможно, поскольку оно в точности одинаково с обеих сторон пластинки. Однако ситуация меняется, если взять две параллельные пластинки (как в плоском конденсаторе). Между ними, в силу граничных условий, не будет мод электромагнитных колебаний с длинами волн, превышающими расстояние между пластинками d . Поэтому плотность энергии нулевых колебаний, а следовательно и их давление между пластинками будут несколько меньше, чем снаружи. Поэтому появится разностная сила, стремящаяся сжать пластинки — сила Казимира.

Нетрудно оценить с точностью до порядка ее величину. Начнем с одномерного случая. В бесконечной длинной линии плотность энергии нулевых колебаний пропорциональна

$$\varepsilon_{\infty} \propto \int_0^{\infty} \hbar \omega \, d\omega; \quad (3.2.1)$$

в линии длиной d нет мод с частотами ниже $\sim c/d$:

$$\varepsilon_d \propto \int_{c/d}^{\infty} \hbar \omega \, d\omega. \quad (3.2.2)$$

Разность этих двух (бесконечных) значений пропорциональна

$$\delta\varepsilon \propto \int_0^{c/d} \hbar \omega \, d\omega \propto \frac{\hbar}{d^2}. \quad (3.2.3)$$

В трехмерном случае интеграл по частотам $\int d\omega$ заменяется на $\int \omega^2 d\omega$ (формула для объемного интеграла в сферических координатах!), следовательно разность плотностей энергий, а соответственно и давлений, будет пропорциональна

$$\delta\varepsilon \propto \int_0^{c/d} \hbar \omega \omega^2 \, d\omega \propto \frac{\hbar}{d^4}. \quad (3.2.4)$$

Добавив сюда из соображений размерности множитель c , получим, что на две близко расположенные параллельные металлические пластинки площадью \mathcal{A} должна действовать сила, равная по порядку величины

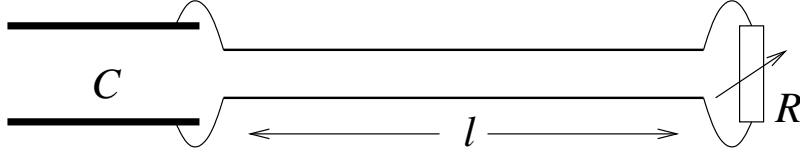


Рис. 3: Схема передачи информации без излучения электромагнитных квантов

$$F \sim \frac{\hbar c}{d^4} \mathcal{A}. \quad (3.2.5)$$

Точный расчет, основанный на квантовании электромагнитных мод в трехмерном пространстве, дает, что эта сила равна

$$F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} \mathcal{A} \approx 1.2 \cdot 10^{-18} \times \left(\frac{1 \text{ см}}{d} \right)^4 \times \left(\frac{\mathcal{A}}{1 \text{ см}^2} \right) \text{ дин}. \quad (3.2.6)$$

Эта сила, в силу ее крутой зависимости от d , становится весьма значительной на субмикронных расстояниях. например, при $d = 0.1 \text{ мкм}$ и $\mathcal{A} = 1 \text{ см}^2$ она равна ≈ 120 дин.

Флуктуации давления нулевых колебаний Очевидно, что силы давления нулевых колебаний с двух сторон металлической пластинки компенсируют друг друга лишь в среднем. Их флуктуации независимы друг от друга, и поэтому возникает разностная *флуктуационная* сила. Можно показать, что ее спектральная плотность равна

$$S(\omega) = \frac{\hbar^2 \omega^5}{120 \pi^4 c^4} \mathcal{A}. \quad (3.2.7)$$

Эта сила, правда, очень мала (из-за множителя \hbar^2/c^4), и поэтому вряд ли может быть экспериментально обнаружена в обозримом будущем.

Передача информации через нулевые колебания Используя зависимость плотности энергии нулевых колебаний от граничных условий, можно, по крайней мере в принципе, передавать информацию без излучения электромагнитных квантов. Принцип действия такого канала связи состоит в модуляции граничного условия на одном конце линии передачи и измерении вызванных этим вариаций плотности нулевой электромагнитной энергии.

Представим, что конденсатор C , с расстоянием между пластинами d , подключен к линии передачи длиной $l = v\tau$, с волновым сопротивлением ρ и скоростью распространения сигнала v (см. рис. 3).

Нулевые колебания собственных мод системы создают силу притяжения между обкладками конденсатора. Структура этих мод существенно зависит от вида граничного условия на дальнем (по отношению к конденсатору) конце линии, поэтому манипулируя этим граничным условием, можно модулировать силу притяжения.

При замкнутом дальнем конце линии наименьшая собственная мода системы соответствует LC-контуре, составленной из конденсатора C и распределенной индуктивности линии $L_{\text{line}} = \rho\tau$. В конденсаторе находится существенная часть энергии

такой моды (если длина линии не слишком велика, то около половины). В то же время, при разомкнутом конце линии подобная “полу-сосредоточенная” мода отсутствует. Поэтому сила притяжения между обкладками конденсатора будет максимальна при замкнутом конце и минимальна при разомкнутом.

Нетрудно оценить, с точностью до порядка, величину разности сил притяжения.

$$F \sim \frac{\hbar\omega_1}{d}, \quad (3.2.8)$$

где

$$\omega_1 \sim \frac{1}{\sqrt{L_{\text{line}}C}} \quad (3.2.9)$$

— частота “полу-сосредоточенной” моды. Эта сила тем больше, чем меньше емкость C , но лишь до тех пор, пока эта емкость больше распределенной емкости линии $C_{\text{line}} = \tau/\rho$. Подставив в формулу (3.2.9) минимальное возможное значение $C = C_{\text{line}}$, получим, что $\omega_1 \sim 1/\tau$ и

$$F \sim \frac{\hbar}{d\tau}, \quad (3.2.10)$$

Точный расчет дает, что эта сила равна

$$F \approx 0.07 \frac{\hbar}{d\tau}, \quad (3.2.11)$$

Эта сила весьма мала — например, при скорости v , равной скорости света, $d = 10^{-4}$ см и $l = 10^2$ см она равна $\simeq 2 \cdot 10^{-16}$ дин. Ее отношение к силе Казимира, приходящейся на площадь d^2 при том же расстоянии между пластинами d , составляет $\approx 1.7d/l \ll 1$. Тем не менее, то обстоятельство, что она может быть “окрашена” — превращена из постоянной в меняющуюся по заданному, например, гармоническому закону — путем периодической модуляции граничного условия, экспериментальную задачу по ее обнаружению не абсолютно безнадежной.

3.3 Монофотонное состояние

3.3.1 Переход к непрерывному спектру

При рассмотрении любых сколько-нибудь нетривиальных состояний в распределенных квантовых системах возникает очевидная проблема: как бороться с бесконечномерными волновыми функциями? Для систем со счетным набором степеней свободы можно написать нечто вроде

$$|\Psi\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} |\psi_n\rangle, \quad (3.3.1)$$

где $|\psi_n\rangle$ — волновая функция каждой моды. Но как быть с системами с всюду плотным спектром (как например, с бесконечной длинной линией?)

Начнем с простейшего случая, когда на всю систему имеется один квант. Такие состояния называются монофотонными. Рассмотрим сначала двумерную систему. Для нее любое монофотонное состояние можно представить в виде:

$$|1(\psi_1, \psi_2)\rangle = \psi_1|1|0\rangle + \psi_2|0|1\rangle, \quad (3.3.2)$$

где $\psi_{1,2}$ — амплитуды вероятностей того, что квант находится в первой и второй моде, соответственно. Они, очевидно, удовлетворяют нормировке

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1. \quad (3.3.3)$$

Эту волновую функцию можно также записать как

$$|1(\psi_1, \psi_2)\rangle = (\psi_1 \hat{a}_1^+ + \psi_2 \hat{a}_2^+) |0\rangle, \quad (3.3.4)$$

где $\hat{a}_{1,2}^+$ — операторы рождения для соответствующих мод.

Аналогичным образом можно записать волновую функцию и для произвольного числа степеней свободы (для трех степеней свободы будет сумма из трех слагаемых, четырех — четыре, и так далее). Для бесконечного, но счетного числа степеней свободы (например, длинной линии конечной длины или объемного резонатора) будет:

$$|1(\psi_1, \psi_2, \dots)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \hat{a}_n^+ |0\rangle, \quad (3.3.5)$$

где коэффициенты ψ_n удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 = 1. \quad (3.3.6)$$

Теперь уже очевидно, как можно переходить к пределу всюду плотного спектра мод (в частности, бесконечной линии). Для этого надо операторы \hat{a}_n^+ заменить введенной в предыдущем разделе функцией $\hat{a}^+(\omega)$, коэффициенты ψ_n — функцией $\psi(\omega)$, а сумму — интегралом:

$$|1[\psi(\omega)]\rangle = \int_0^{\infty} \psi(\omega) \hat{a}^+(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} |0\rangle. \quad (3.3.7)$$

Отметим, что если для систем со счетным числом степеней свободы волновая функция $|\Psi_1\rangle$ является *функцией* коэффициентов ψ_n , то для систем с непрерывным спектром — *функционалом* от функции $\psi(\omega)$.

3.3.2 Основные свойства монофотонного состояния

Для упрощения формул будем везде, где можно, писать просто $|1\rangle$ вместо $|1[\psi(\omega)]\rangle$, помня, однако, что $|1\rangle$ является функционалом от функции $\psi(\omega)$.

Нормировка Норма вычисляется с помощью коммутатора (3.1.34) и очевидного условия, что для любой частоты ω будет $\hat{a}(\omega)|0\rangle = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle 1|1\rangle &= \int_0^\infty \psi^*(\omega)\psi(\omega') \langle 0|\hat{a}(\omega)\hat{a}^+(\omega')|0\rangle \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \\ &= \int_0^\infty \psi^*(\omega)\psi(\omega') \langle 0|(\hat{a}^+(\omega')\hat{a}(\omega) + 2\pi\delta(\omega - \omega'))|0\rangle \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \\ &= \int_0^\infty |\psi(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Следовательно, для “волновой функции” $\psi(\omega)$ должно выполняться условие

$$\int_0^\infty |\psi(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 1. \quad (3.3.9)$$

Число квантов Монофотонное состояние “по построению” является состоянием с заданным (и равным единице) числом квантов. В этом можно убедиться и непосредственно. Действительно, рассмотрим оператор числа квантов для систем с непрерывным спектром

$$\hat{N} = \int_0^\infty \hat{a}^+(\omega)\hat{a}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.3.10)$$

Подействуем им на монофотонное состояние:

$$\begin{aligned} \hat{N}|1\rangle &= \int_0^\infty \hat{a}^+(\omega)\hat{a}(\omega)\psi(\omega')\hat{a}^+(\omega') \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |0\rangle = \\ &= \int_0^\infty \hat{a}^+(\omega)\psi(\omega') \left(\hat{a}^+(\omega')\hat{a}(\omega) + 2\pi\delta(\omega - \omega') \right) \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |0\rangle \\ &= \int_0^\infty \hat{a}^+(\omega)\psi(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} |0\rangle = 1 \cdot |1\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Энергия Для распределенных систем, в отличие от сосредоточенного осциллятора, точное заданное число квантов еще не означает, что и энергия системы точно задана. Энергия кванта пропорциональна его частоте, а частота точно не известна, поскольку не известно, в какой именно моде “сидит” квант.

Действительно, подействуем оператором энергии на монофотонное состояние. Для того, чтобы не связываться с бесконечной энергией нулевых колебаний, будем рассматривать перенормированную энергию

$$\hat{\mathcal{E}} = \int_0^\infty \hbar\omega \hat{a}^+(\omega) \hat{a}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.3.12)$$

Тогда будет:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}|1\rangle &= \int_0^\infty \hbar\omega \hat{a}^+(\omega) \hat{a}(\omega) \psi(\omega') \hat{a}^+(\omega') \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |0\rangle = \\ &= \int_0^\infty \hbar\omega \hat{a}^+(\omega) \psi(\omega') \left(\hat{a}^+(\omega') \hat{a}(\omega) + 2\pi\delta(\omega - \omega') \right) \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |0\rangle \\ &= \int_0^\infty \hbar\omega \hat{a}^+(\omega) \psi(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} |0\rangle \neq \text{const} \cdot |1\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Волновая функция монофотонного состояния не является собственной для оператора энергии!

Найдем дисперсию энергии для монофотонного состояния. Повторяя рекуррентно выкладки формулы (3.3.13) можно показать, что для любого целого n будет

$$\hat{\mathcal{E}}^n |1\rangle = \int_0^\infty (\hbar\omega)^n \psi(\omega) \hat{a}^+(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} |0\rangle. \quad (3.3.14)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle 1 | \hat{\mathcal{E}}^n | 1 \rangle &= \langle 0 | \int_0^\infty \psi^*(\omega') \hat{a}(\omega') (\hbar\omega)^n \psi(\omega) \hat{a}^+(\omega) \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |0\rangle \\ &= \int_0^\infty (\hbar\omega)^n |\psi(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Следовательно, функция $|\psi(\omega)|^2/2\pi$ является распределением вероятности для случайной величины - частоты (и пропорциональной ей энергии) фотона в монофотонном состоянии. В частности, среднее значение энергии равно

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \hbar \langle \omega \rangle = \hbar \int_0^\infty \omega |\psi(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.3.16)$$

а неопределенность энергии —

$$(\Delta \mathcal{E})^2 = \hbar^2 (\Delta \omega)^2 = \hbar^2 \int_0^\infty (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |\psi(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.3.17)$$

Пространственное распределение энергии Квадрат модуля функции $\psi(\omega)$ отвечает за частотное распределение энергии в монофотонном состоянии. Напрашивается, что квадрат модуля Фурье-образа этой функции определяет пространственное распределение энергии.

Действительно, вычислим плотность энергии в монофотонном состоянии (см. формулу (3.1.46)):

$$\begin{aligned} \langle 1 | \hat{\varepsilon}^{(N)}(x) | 1 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\hbar \sqrt{\omega \omega'}}{c} \psi^*(\omega'') \psi(\omega''') \\ &\times \langle 0 | \hat{a}(\omega'') \hat{a}^+(\omega) \hat{a}(\omega') \hat{a}^+(\omega''') | 0 \rangle e^{i(\omega' - \omega)x/v} \frac{d\omega d\omega' d\omega'' d\omega'''}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

где c — скорость света (в этом разделе мы будем полагать, что $v = c$).

Как обычно, используем коммутатор (3.1.34):

$$\begin{aligned} &\langle 0 | \hat{a}(\omega'') \hat{a}^+(\omega) \hat{a}(\omega') \hat{a}^+(\omega''') | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \left(\hat{a}^+(\omega) \hat{a}(\omega'') + 2\pi\delta(\omega - \omega'') \right) \left(\hat{a}^+(\omega''') \hat{a}(\omega') + 2\pi\delta(\omega' - \omega''') \right) | 0 \rangle \\ &= \delta(\omega - \omega'') \delta(\omega' - \omega'''). \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

В итоге получается квадрат модуля от “почти” преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \langle 1 | \hat{\varepsilon}^{(N)}(x) | 1 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\hbar \sqrt{\omega \omega'}}{c} \psi^*(\omega) \psi(\omega') e^{i(\omega' - \omega)x/c} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \\ &= \frac{\hbar}{c} \left| \int_0^\infty \sqrt{\omega} \psi(\omega) e^{i\omega x/c} \frac{d\omega}{2\pi} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Разница лишь в дополнительном сомножителе $\sqrt{\omega}$.

Положение кванта внутри импульса Рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Пусть первый экспериментатор (Алиса) готовит одинаковые монофотонные состояния и посылает их второму (Бобу). У Боба есть идеальный фотодетектор, и он измеряет время прихода каждого из монофотонных состояний на этот детектор.

Если бы у Боба был не фотодетектор, а некое устройство, измеряющее энергию падающих фотонов (чувствительное к их частоте), то статистика моментов срабатывания этого устройства t определялась бы формулой (3.3.20), с очевидной подстановкой $t = -x/c$ (напомним, что мы рассматриваем волну, бегущую вправо, так что чем раньше сработал детектор, то есть чем меньше t , тем значит ближе был фотон к голове импульса, то есть тем больше x).

Однако идеальный фотодетектор нечувствителен к частоте регистрируемых квантов. Можно показать, что он из-за этого статистика его отсчетов будет определяться не пространственной плотностью энергии (3.1.45), а пространственной плотностью числа квантов

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{1}{c} \int_0^\infty \left[\hat{a}^+(\omega') \hat{a}(\omega) e^{i(\omega - \omega')x/c} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\hat{a}(\omega) \hat{a}(\omega') e^{i(\omega + \omega')x/c} + \hat{a}^+(\omega) \hat{a}^+(\omega') e^{-i(\omega' + \omega)x/c} \right) \right] \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Доказательство здесь довольно громоздко и требует обращения к принципам работы фотодетекторов (теории фотоотсчетов). Однако то, что оператор плотности числа

квантов имеет именно такой вид, можно легко сообразить исходя из правила $\mathcal{E} = \hbar\omega n$.

Среднее значение этой величины вычисляется аналогично среднему значению плотности энергии (3.3.20) и равно

$$\langle 1 | \hat{n}(x) | 1 \rangle = \frac{1}{c} \int_0^\infty \psi^*(\omega) \psi(\omega') e^{i(\omega' - \omega)x/c} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = \frac{1}{c} \left| \int_0^\infty \psi(\omega) e^{i\omega x/c} \frac{d\omega}{2\pi} \right|^2. \quad (3.3.22)$$

Таким образом, пространственное расположение фотона внутри монофотонного состояния (измеряемое по моменту его регистрации фотодетектором) определяется Фурье-преобразованием от волновой функции $\psi(\omega)$.

Соотношения неопределенностей для монофотонного состояния Из формулы (3.3.22) следует, что неопределенностей частоты фотона $\Delta\omega$ и момента времени его регистрации фотодетектором Δt справедливо неравенство

$$\Delta\omega \Delta t \geq \frac{1}{2}. \quad (3.3.23)$$

Поскольку энергия фотона пропорциональна его частоте, $\mathcal{E} = \hbar\omega$, то справедливо также следующее неравенство для неопределенностей энергии $\Delta\mathcal{E}$ и времени прихода Δt :

$$\Delta\mathcal{E} \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.3.24)$$

Наконец, в силу соотношений

$$\mathcal{E} = pc, \quad (3.3.25a)$$

$$x = -ct, \quad (3.3.25b)$$

справедливо привычное соотношение для неопределенностей импульса фотона p и его пространственной координаты x :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.3.26)$$

3.4 Когерентное состояние бегущей волны

3.4.1 Переход к непрерывному спектру

Состояния с заданным числом квантов, в том числе монофотонное состояние, в настоящее время являются экзотикой. В принципе монофотонные состояния умеют готовить, используя т.н. одноатомные лазеры. Однако куда более привычными остаются когерентные состояния. В частности, почти во всех экспериментах по квантовой связи использовались когерентные состояния с малым средним числом квантов $\langle n \rangle \lesssim 1$, полученные путем пропускания “обычных” лазерных импульсов через поглощающие “серые” фильтры.

Для того, чтобы решить проблему с предельным переходом к непрерывному спектру для когерентного состояния, рассмотрим сначала, как и в предыдущем разделе, случай счетного числа степеней свободы. Напомним, что для одномерного осциллятора когерентное состояние может быть получено действием оператора сдвига на нулевое состояние:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (3.4.1)$$

где

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}} \quad (3.4.2)$$

— оператор сдвига.

Когерентное состояние в системе из двух осцилляторов задается двумя комплексными числами α_1, α_2 :

$$|\alpha_1, \alpha_2\rangle = \hat{D}_1(\alpha_1)\hat{D}_2(\alpha_2)|0\rangle, \quad (3.4.3)$$

где

$$\hat{D}_{1,2}(\alpha_{1,2}) = \exp(\alpha_{1,2}\hat{a}_{1,2}^+ - \alpha_{1,2}^*\hat{a}_{1,2}) \quad (3.4.4)$$

— операторы сдвига для соответствующих осцилляторов. Оно может быть переписано в виде:

$$|\alpha_1, \alpha_2\rangle = \hat{D}(\alpha_1, \alpha_2)|0\rangle, \quad (3.4.5)$$

где

$$\hat{D}(\alpha_1, \alpha_2) = e^{\alpha_1\hat{a}_1^+ + \alpha_2\hat{a}_2^+ - \alpha_1^*\hat{a}_1 - \alpha_2^*\hat{a}_2} \quad (3.4.6)$$

— двумерный оператор сдвига.

В системе из бесконечного, но счетного числа осцилляторов, соответственно, будет:

$$|\alpha_1, \alpha_2, \dots\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \hat{D}_n(\alpha_n)|0\rangle = \hat{D}(\alpha_1, \alpha_2, \dots)|0\rangle, \quad (3.4.7)$$

где

$$\hat{D}(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n\hat{a}_n^+ - \alpha_n^*\hat{a}_n) \right]. \quad (3.4.8)$$

То есть когерентное состояние в такой системе задается бесконечномерным комплексным вектором $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$.

Теперь нетрудно перейти к пределу бесконечной линии, заменяя суммы по модам интегралами $\int d\omega/2\pi$ и вектор $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ функцией $\alpha(\omega)$:

$$|\alpha\rangle = \hat{\mathcal{D}}[\alpha]|0\rangle, \quad (3.4.9)$$

где

$$\hat{\mathcal{D}}[\alpha] = \exp\left(\int_0^\infty [\alpha(\omega)\hat{a}^+(\omega) - \alpha^*(\omega)\hat{a}(\omega)] \frac{d\omega}{2\pi}\right). \quad (3.4.10)$$

Отметим, что введенное таким образом когерентное состояние является *функционалом* от функции $\alpha(\omega)$.

3.4.2 Основные свойства когерентного состояния бегущей волны

При выводе формул в этом разделе будут активно использоваться очевидные формулы

$$\hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}(\omega)\hat{\mathcal{D}}[\alpha] = \hat{a}(\omega) + \alpha(\omega), \quad (3.4.11a)$$

$$\hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}^+(\omega)\hat{\mathcal{D}}[\alpha] = \hat{a}^+(\omega) + \alpha^*(\omega). \quad (3.4.11b)$$

и

$$\hat{\mathcal{D}}[\alpha]\hat{\mathcal{D}}^+[\alpha] = 1, \quad (3.4.12)$$

из которых следует, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}^+(\omega)\hat{a}(\omega)\hat{\mathcal{D}}[\alpha] &= \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}^+(\omega)\hat{\mathcal{D}}[\alpha]\hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}(\omega)\hat{\mathcal{D}}[\alpha] \\ &= [\hat{a}^+(\omega) + \alpha^*(\omega)][\hat{a}(\omega) + \alpha(\omega)] \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}^+(\omega)\hat{a}(\omega)\hat{a}^+(\omega')\hat{a}(\omega')\hat{\mathcal{D}}[\alpha] &= \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}^+(\omega)\hat{\mathcal{D}}[\alpha]\hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}(\omega)\hat{\mathcal{D}}[\alpha]\hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}^+(\omega')\hat{\mathcal{D}}[\alpha]\hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}(\omega')\hat{\mathcal{D}}[\alpha] \\ &= [\hat{a}^+(\omega) + \alpha^*(\omega)][\hat{a}(\omega) + \alpha(\omega)][\hat{a}^+(\omega') + \alpha^*(\omega')][\hat{a}(\omega') + \alpha(\omega')] \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Число квантов Среднее число в бегущей волне квантов равно

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{N} \rangle &= \langle 0|\hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{\mathcal{N}}\hat{\mathcal{D}}[\alpha]|0\rangle = \langle 0|\int_0^\infty \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha]\hat{a}^+(\omega)\hat{a}(\omega)\hat{\mathcal{D}}[\alpha] \frac{d\omega}{2\pi} |0\rangle \\ &= \int_0^\infty \langle 0|[\hat{a}^+(\omega) + \alpha^*(\omega)][\hat{a}(\omega) + \alpha(\omega)]|0\rangle \frac{d\omega}{2\pi} = \int_0^\infty |\alpha(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}, \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

а средний квадрат числа квантов —

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{N}^2 \rangle &= \langle 0 | \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha] \hat{\mathcal{N}}^2 \hat{\mathcal{D}}[\alpha] | 0 \rangle = \langle 0 | \int_0^\infty \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha] \hat{a}^+(\omega) \hat{a}(\omega) \hat{a}^+(\omega') \hat{a}(\omega') \hat{\mathcal{D}}[\alpha] \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} | 0 \rangle \\
&= \int_0^\infty \langle 0 | [\hat{a}^+(\omega) + \alpha^*(\omega)] [\hat{a}(\omega) + \alpha(\omega)] [\hat{a}^+(\omega') + \alpha^*(\omega')] [\hat{a}(\omega') + \alpha(\omega')] | 0 \rangle \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \\
&= \int_0^\infty \alpha^*(\omega) \alpha(\omega') \langle 0 | [\hat{a}(\omega) + \alpha(\omega)] [\hat{a}^+(\omega') + \alpha^*(\omega')] | 0 \rangle \frac{d\omega}{2\pi} \\
&= \int_0^\infty \alpha^*(\omega) \alpha(\omega') [2\pi\delta(\omega - \omega') + \alpha(\omega) \alpha^*(\omega')] \frac{d\omega}{2\pi} \\
&= \langle \mathcal{N} \rangle^2 + \langle \mathcal{N} \rangle. \quad (3.4.16)
\end{aligned}$$

Следовательно, неопределенность числа квантов равна

$$(\Delta \mathcal{N})^2 = \langle \mathcal{N}^2 \rangle - \langle \mathcal{N} \rangle^2 = \langle \mathcal{N} \rangle \quad (3.4.17)$$

— точно так же, как и в случае одномерного осциллятора.

Энергия Аналогичным образом вычисляются средняя энергия:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E} \rangle &= \langle 0 | \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha] \hat{\mathcal{E}} \hat{\mathcal{D}}[\alpha] | 0 \rangle = \langle 0 | \int_0^\infty \hbar\omega \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha] \hat{a}^+(\omega) \hat{a}(\omega) \hat{\mathcal{D}}[\alpha] \frac{d\omega}{2\pi} | 0 \rangle \\
&= \int_0^\infty \hbar\omega \langle 0 | [\hat{a}^+(\omega) + \alpha^*(\omega)] [\hat{a}(\omega) + \alpha(\omega)] | 0 \rangle \frac{d\omega}{2\pi} = \int_0^\infty \hbar\omega |\alpha(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3.4.18)
\end{aligned}$$

и средний квадрат энергии:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}^2 \rangle &= \langle 0 | \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha] \hat{\mathcal{E}}^2 \hat{\mathcal{D}}[\alpha] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int_0^\infty \hbar^2 \omega \omega' \hat{\mathcal{D}}^+[\alpha] \hat{a}^+(\omega) \hat{a}(\omega) \hat{a}^+(\omega') \hat{a}(\omega') \hat{\mathcal{D}}[\alpha] \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} | 0 \rangle \\
&= \int_0^\infty \hbar^2 \omega \omega' \langle 0 | [\hat{a}^+(\omega) + \alpha^*(\omega)] [\hat{a}(\omega) + \alpha(\omega)] \\
&\quad \times [\hat{a}^+(\omega') + \alpha^*(\omega')] [\hat{a}(\omega') + \alpha(\omega')] | 0 \rangle \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \\
&= \int_0^\infty \hbar^2 \omega \omega' \alpha^*(\omega) \alpha(\omega') \langle 0 | [\hat{a}(\omega) + \alpha(\omega)] [\hat{a}^+(\omega') + \alpha^*(\omega')] | 0 \rangle \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \\
&= \int_0^\infty \hbar^2 \omega \omega' \alpha^*(\omega) \alpha(\omega') [2\pi\delta(\omega - \omega') + \alpha(\omega) \alpha^*(\omega')] \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \\
&= \int_0^\infty (\hbar\omega)^2 |\alpha(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} + \langle \mathcal{E} \rangle^2. \quad (3.4.19)
\end{aligned}$$

Следовательно, дисперсия энергии равна

$$(\Delta \mathcal{E})^2 = \langle \mathcal{E}^2 \rangle - \langle \mathcal{E} \rangle^2 = \int_0^\infty (\hbar\omega)^2 |\alpha(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.4.20)$$

Удобно ввести величину средней частоты:

$$\bar{\omega} = \frac{\langle \mathcal{E} \rangle}{\hbar \langle \mathcal{N} \rangle} = \frac{\int_0^\infty \omega |\alpha(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}}{\int_0^\infty |\alpha(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}}. \quad (3.4.21)$$

С ее помощью дисперсия энергии может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$(\Delta \mathcal{E})^2 = \hbar \bar{\omega} \langle \mathcal{E} \rangle + \int_0^\infty (\omega - \bar{\omega})^2 |\alpha(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.4.22)$$

Первое из них похоже на дисперсию энергии для обычного одномерного осциллятора $\hbar \omega \langle \mathcal{E} \rangle$ и естественным образом интерпретируется как неопределенность энергии, возникающая из-за неопределенности числа квантов в электромагнитной волне. Также очевидно, что источником второго, дополнительного, слагаемого является неопределенность частоты каждого из квантов.

3.5 Задания

1. “Доплеровский измеритель”

Монофотонный импульс с заданной волновой функцией $\psi(\omega)$ отражается от пробной массы, движущейся со заданной скоростью v . Считая пробную массу классической и ее скорость неизменной, найти, с какой точностью можно измерить v по сдвигу частоты отраженного импульса. Предполагается, что у нас есть прибор, позволяющий сколь угодно точно измерять энергию падающих на него квантов.

2. “Гильотина”

По линии передачи распространяется импульс, находящийся в когерентном состоянии с заданной волновой функцией $\alpha(\omega)$. В какой-то момент времени линия передачи перекрывается абсолютно отражающим зеркалом, так что голова импульса продолжает двигаться вперед, а хвост отражается назад. Найти волновую функцию получившегося состояния.

4 Диссипация в квантовых системах

4.1 Напоминание о чистых и смешанных квантовых состояниях

4.1.1 Оператор плотности

Два вида неопределенностей в квантовой теории. Вспомним, что квантовая теория имеет дело с двумя видами неопределенностей. Во первых, существуют *чисто квантовые* неопределенности, описываемые волновыми функциями. Они принципиально неустранимы в том смысле, что если пытаться уменьшить ширину волновой функции в каком-то одном представлении (например, координатном), в ширину то-же волновой функции в представлении, соответствующем канонически сопряженной наблюдаемой (например, импульсу), обязательно увеличивается. В силу этого площадь, занимаемая волновой функцией на фазовой плоскости, не может быть меньше чем $\hbar/2$ — это ее “предел сжимаемости”.

Во вторых, существуют *статистические* неопределенности, имеющие ту же природу, что и статистические неопределенности в классической физике. Они соответствуют просто неполному знанию состояния системы и описываются операторами плотности. Представим себе например, такой мысленный эксперимент. Экспериментатор А (Алиса) решает бросить монетку и в зависимости от того, что выпадет, приготовить квантовый осциллятор либо в нулевом состоянии $|0\rangle$, либо в некотором заданном когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Она сообщает об этом плане экспериментатору В (Бобу) и затем реализует свой план (но не сообщает Бобу, как у нее выпала монетка). Предположим, что она приготовила состояние $|\alpha\rangle$. Для Боба в этом случае осциллятор будет находиться в смешанном состоянии с оператором плотности

$$\hat{\rho} = \frac{|0\rangle\langle 0| + |\alpha\rangle\langle \alpha|}{2}. \quad (4.1.1)$$

Если теперь Алиса все-таки сообщит Бобу об исходе своего опыта, то для него состояние системы станет равным $|\alpha\rangle$. Неопределенности всех наблюдаемых в ней для него уменьшатся, однако никакого возмущения канонически сопряженных наблюдаемых, очевидно, при этом не произойдет. То есть смешанные состояния являются “сжимаемыми” — занимаемая ими площадь на фазовой плоскости может быть уменьшена.

В общем случае, если известно, что система находится в одном из состояний $|\psi_j\rangle$ с вероятностями p_j , соответственно ($j = 1, 2, \dots$), то ее оператор плотности будет равен

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle \psi_j|. \quad (4.1.2)$$

Чистое состояние можно рассматривать как предельный случай смешанного, когда одна из вероятностей p_j , например p_1 , равна единице, а остальные равны нулю. Оператор плотности такого состояния равен

$$\hat{\rho} = |\psi_1\rangle\langle \psi_1|. \quad (4.1.3)$$

Основные свойства оператора плотности.

Нормировка. Пусть $\{|n\rangle\}$ — набор собственных состояний для какого-то (любого) оператора \hat{N} . Вычислим сумму диагональных элементов матрицы $\langle n|\hat{\rho}|n\rangle$ — матрицы плотности, соответствующей состоянию $\hat{\rho}$ в представлении оператора \hat{N} :

$$\text{Sp } \hat{\rho} = \sum_n \langle n|\hat{\rho}|n\rangle = \sum_n \sum_j p_j \langle n|\psi_j\rangle \langle \psi_j|n\rangle = \sum_j p_j \sum_n |\langle n|\psi_j\rangle|^2 = \sum_j p_j = 1. \quad (4.1.4)$$

Поскольку \hat{N} — это произвольный оператор, то след (Sp, сумма всех диагональных элементов) оператора плотности не зависит от его выбора и всегда равен единице.

Средние значения наблюдаемых Средние значения наблюдаемых в смешанном состоянии могут быть вычислены как взвешенное среднее средних значений для каждого из чистых состояний $|\psi_j\rangle$;

$$\langle \hat{Q} \rangle = \sum_j p_j \langle \psi_j|\hat{Q}|\psi_j\rangle \quad (4.1.5)$$

Пусть опять $\{|n\rangle\}$ — набор собственных состояний для какого-то (любого) оператора. С учетом условия полноты

$$\sum_n |n\rangle \langle n| \equiv 1, \quad (4.1.6)$$

формула (4.1.5) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \langle \hat{Q} \rangle &= \sum_j p_j \langle \psi_j|\hat{Q} \left(\sum_n |n\rangle \langle n| \right) |\psi_j\rangle = \sum_j p_j \sum_n \langle n|\psi_j\rangle \langle \psi_j|\hat{Q}|n\rangle \\ &= \sum_n \langle n| \left(\sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|\hat{Q} \right) |n\rangle = \sum_n \langle n|\hat{\rho}\hat{Q}|n\rangle, \quad (4.1.7) \end{aligned}$$

или

$$\langle \hat{Q} \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{Q}) \quad (4.1.8)$$

Уравнение движения для оператора плотности Исходя из уравнения Шредингера для каждой из волновых функций $|\psi_j\rangle$, можно найти уравнение движение для оператора плотности (в картине Шредингера):

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} &= \sum_j p_j \left(|\psi_j(t)\rangle \frac{d\langle \psi_j(t)|}{dt} + \frac{d|\psi_j(t)\rangle}{dt} \langle \psi_j(t)| \right) \\ &= \sum_j p_j \left(\frac{\hat{\mathcal{H}}|\psi_j(t)\rangle}{i\hbar} \langle \psi_j(t)| + |\psi_j(t)\rangle \frac{\langle \psi_j(t)|\hat{\mathcal{H}}}{-i\hbar} \right), \quad (4.1.9) \end{aligned}$$

или

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}(t)]. \quad (4.1.10)$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t), \quad (4.1.11)$$

где $\hat{U}(t)$ — оператор эволюции системы, $\hat{\rho}(0)$ — начальное значение оператора плотности.

4.1.2 Квантовые состояния парциальных систем

Типичный случай, когда возникают смешанные состояния — это когда квантовая система имеет несколько степеней свободы, но экспериментатор может контролировать только части из них (парциальной системы). Рассмотрим простой пример. Пусть имеется два осциллятора (будем обозначать их индексами \mathbf{a} и \mathbf{b}), и известно, что у них на двоих имеется один квант. Совместная волновая функция такой системы имеет вид

$$|\Psi\rangle = c_a|1\rangle_a|0\rangle_b + c_b|0\rangle_a|1\rangle_b, \quad (4.1.12)$$

где $c_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ — амплитуды вероятностей того, что квант находится в осцилляторе \mathbf{a} и в осцилляторе \mathbf{b} , соответственно,

$$|c_a|^2 + |c_b|^2 = 1. \quad (4.1.13)$$

Можно написать оператор плотности такого (чистого) состояния:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (4.1.14)$$

Вычислим теперь оператор плотности для первого осциллятора в отдельности. Для этого надо взять *частичный след* от оператора (4.1.14) по гильбертовому подпространству второго осциллятора ($|\mathbf{n}\rangle_b$ — его состояния с заданным числом квантов):

$$\hat{\rho}_a = \text{Sp}_b \hat{\rho} = \sum_{n_b=0}^{\infty} \langle n_b|\Psi\rangle\langle\Psi|n_b\rangle = |c_a|^2|1\rangle_a\langle 1|_a + |c_b|^2|0\rangle_a\langle 0|_a. \quad (4.1.15)$$

То есть получилось смешанное состояние, несмотря на то, что полная система находится в чистом. Это произошло потому, что мы выкинули информацию о состоянии второй степени свободы, и получили из-за этого дополнительную неопределенность.

Смешанное состояние (4.1.15) не следует путать с чистым состоянием

$$|\psi\rangle = c_a|1\rangle_a + c_b|1\rangle_b, \quad (4.1.16)$$

несмотря на то, вероятности того, что в первом осцилляторе находится один или ноль квантов в обоих случаях одинаковые ($|c_a|^2$ и $|c_b|^2$, соответственно).

Задание: вычислить, как зависит от времени средняя координата осциллятора \mathbf{a} для состояний (4.1.15) и (4.1.16). Объяснить разницу.

Полностью изолированных систем в природе, как известно, не существует. Рассмотрим, например, объемный электромагнитный резонатор. Его стенки имеют конечную проводимость. Поэтому электромагнитное поле частично проникает в них, и оказывается связанным с фононными модами в стенках.

При рассмотрении диссипации в квантовых системах используется именно эта модель. Например, осциллятор с диссипацией рассматривается как идеальный осциллятор, связанный с некоей системой, состоящей из огромного числа степеней свободы ($\sim 10^{23}$) — термостатом. Как выясняется, конкретная природа этой системы не важна - важно лишь, чтобы число мод в ней очень велико.

Поскольку экспериментатор не имеет возможности измерять какие-либо наблюдаемые индивидуальных мод в термостате, то возникает как раз описанная выше ситуация, когда он может контролировать только часть полной системы. В итоге квантовое состояние этой части как правило оказывается смешанным.

4.2 Состояние теплового равновесия

4.2.1 Состояние с максимальной энтропией

В качестве меры стохастичности в классической статистической физике используется, как известно энтропия. Если известно, что система может находиться в одном из N состояний с вероятностями p_1, p_2, \dots соответственно, то ее энтропия равна

$$S = -\kappa_B \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n. \quad (4.2.1)$$

В квантовой физики ее аналогом является т.н. *энтропия фон Неймана*

$$S = -\langle \ln \hat{\rho} \rangle = -\kappa_B \text{Sp}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \quad (4.2.2)$$

Легко показать, что для всех чистых состояний она равна нулю.

Найдем квантовое состояние противоположного рода, то есть имеющее максимально возможную энтропию (максимально неупорядоченное). Следует отметить, однако, что просто максимизация энтропии приводит к не очень интересному результату. Если система имеет конечное число N возможных ортогональных состояний (например, у спиновой степени свободы электрона $N = 2$), то в состоянии с максимальной энтропией вероятности нахождения системы в каждом из этих состояний одинаковы и равны $1/N$, а сама энтропия равна $\kappa_B N \ln N$. Если число возможных ортогональных состояний бесконечно (как например, у осциллятора), то максимальная энтропия стремится к бесконечности.

Физически более осмысленной является другая постановка задачи: найти состояние с максимальной энтропии при условии, что средняя энергия $\langle \mathcal{E} \rangle$ системы задана. Математически она формулируется следующим образом: найти максимум функционала (4.2.2) при дополнительных условиях

$$\text{Sp}(\hat{\rho} \hat{\mathcal{H}}) = \langle \mathcal{E} \rangle \equiv \kappa_B T, \quad (4.2.3a)$$

$$\text{Sp} \hat{\rho} = 1. \quad (4.2.3b)$$

где T — температура системы.

Используем метод неопределенных множителей Лагранжа. В соответствии с ним, нужно найти минимум функционала

$$-\kappa_B \text{Sp}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) + \lambda \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{\mathcal{H}}) + \mu \text{Sp} \hat{\rho} = \text{Sp} \left[\hat{\rho} (-\kappa_B \ln \hat{\rho} + \lambda \hat{\mathcal{H}} + \mu) \right], \quad (4.2.4)$$

где λ, μ — неопределенные множители.

Варьируя это выражение по $\hat{\rho}$ и приравнявая вариацию к нулю (условие экстремума), получим:

$$\text{Sp} \left[\delta \hat{\rho} (-\kappa_B \ln \hat{\rho} - \kappa_B + \lambda \hat{\mathcal{H}} + \mu) \right] = 0. \quad (4.2.5)$$

Это уравнение должно выполняться при любом значении вариации $\delta \hat{\rho}$, следовательно, должно быть

$$\kappa_B \ln \hat{\rho} = -\kappa_B + \lambda \hat{\mathcal{H}} + \mu \Rightarrow \hat{\rho} = \exp \left(\frac{\mu}{\kappa_B} - 1 + \lambda \hat{\mathcal{H}} \right). \quad (4.2.6)$$

Используя дополнительные условия (4.2.3), последнее выражение можно представить также в виде

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{\kappa_B T} \right), \quad (4.2.7)$$

где

$$Z = \text{Sp} \left[\exp \left(-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{\kappa_B T} \right) \right] \quad (4.2.8)$$

— т.н. статистическая сумма системы.

4.2.2 Статистика числа квантов в состоянии теплового равновесия для гармонического осциллятора

Рассмотрим теперь частный случай гармонического осциллятора, для которого

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar \omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.2.9)$$

Оператор плотности состояния теплового равновесия для него будет иметь вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n |n\rangle \langle n|, \quad (4.2.10)$$

где

$$\rho_n = \frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{\hbar \omega}{\kappa_B T} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] = (1 - e^{-\beta}) e^{-\beta n} \quad (4.2.11)$$

— вероятность того, что в осцилляторе находится n квантов, а

$$\beta \equiv \frac{\hbar \omega}{\kappa_B T}. \quad (4.2.12)$$

Используя формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha e^{-\beta n} = (-1)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^\alpha e^{-\beta n}}{\partial \beta^\alpha} = (-1)^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial \beta^\alpha} \frac{1}{1 - e^{-\beta}} \quad (4.2.13)$$

(α — целое число), легко найти среднее значение числа квантов в состоянии теплового равновесия:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho_n = \frac{1}{e^\beta - 1} \quad (4.2.14)$$

(формула Планка), а также дисперсию числа квантов в этом состоянии

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \rho_n - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle. \quad (4.2.15)$$

Предельный случай нулевой температуры В предельном случае нулевой температуры ($T \rightarrow 0$) параметр $\beta \rightarrow \infty$, и все коэффициенты ρ_n , кроме ρ_0 , становятся равными нулю. В итоге оператор плотности состояния теплового равновесия принимает вид:

$$\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|. \quad (4.2.16)$$

То есть равновесным в предельном случае $T = 0$ является, как и следовало ожидать, состояние с наименьшей возможной энергией $|0\rangle$.

4.2.3 Метод характеристической функции

Характеристическая функция является очень полезным инструментом, во многих случаях упрощающим вычисления, в частности вычисления распределений вероятностей различных наблюдаемых.

Характеристическая функцией $\chi(\xi)$ для некоторой наблюдаемой Q определяется как среднее значение оператора $e^{-i\xi\hat{Q}}$, где ξ — число (аргумент характеристической функции). Например, если система находится в состоянии с оператором плотности $\hat{\rho}$, то

$$\chi(\xi) = \langle e^{-i\xi\hat{Q}} \rangle = \text{Sp} \left(\hat{\rho} e^{-i\xi\hat{Q}} \right). \quad (4.2.17)$$

Пусть оператор \hat{Q} имеет непрерывный спектр собственных значений. Тогда его можно представить в виде

$$\hat{Q} = \int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle q \langle q| dq, \quad (4.2.18)$$

где q — собственные значения, а $|q\rangle$ — соответствующие собственные состояния. Соответственно, справедлива также формула

$$e^{-i\xi\hat{Q}} = \int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle e^{-i\xi q} \langle q| dq, \quad (4.2.19)$$

Подставив ее в выражение для характеристической функции, получим:

$$\chi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi q} \text{Sp} (\hat{\rho}|q\rangle\langle q|) dq = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi q} \langle q|\hat{\rho}|q\rangle dq = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi q} w(q) dq, \quad (4.2.20)$$

где

$$w(q) \equiv \langle q|\hat{\rho}|q\rangle \quad (4.2.21)$$

— распределение вероятностей для величины Q в состоянии $\hat{\rho}$.

Таким образом, что характеристическая функция какой-то наблюдаемой является Фурье-образом распределения вероятностей для этой наблюдаемой. Отсюда следует, что зная характеристическую функцию, можно получить из нее распределение вероятностей путем обратного преобразования Фурье:

$$w(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) e^{i\xi q} \frac{d\xi}{2\pi}. \quad (4.2.22)$$

В этом и состоит основная польза от характеристической функции, так как часто вычислить ее намного легче, чем непосредственно вычислять распределение вероятностей.

4.2.4 Распределения вероятностей для координаты и импульса осциллятора в состоянии теплового равновесия

Используя метод характеристической функции, можно вычислить распределения вероятностей для координаты и импульса осциллятора в состоянии теплового равновесия. Удобно убить сразу двух (на самом деле даже бесконечное число) зайцев одним выстрелом, вычислив характеристическую функцию и распределение вероятностей для наблюдаемой

$$\hat{A} = \alpha \hat{a} + \alpha^* \hat{a}^+, \quad (4.2.23)$$

— произвольное число. При различных значениях α наблюдаемая A превращается в координату, импульс и их всевозможные линейные комбинации.

В состоянии теплового равновесия (4.2.10) характеристическая функция равна

$$\chi(\xi) = \text{Sp} \left(\rho e^{-i\xi \hat{A}} \right) = (1 - e^{-\beta}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n} \langle n | e^{-i\xi \hat{A}} | n \rangle. \quad (4.2.24)$$

Используя теорему 6, матричный элемент можно преобразовать к следующему виду:

$$\langle n | e^{-i\xi \hat{A}} | n \rangle = e^{-\xi^2 |\alpha|^2 / 2} \langle n | e^{i\xi \alpha^* \hat{a}^+} e^{i\xi \alpha \hat{a}} | n \rangle. \quad (4.2.25)$$

Далее, представим волновую функцию $|n\rangle$ в виде:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (4.2.26)$$

и используем теорему 4:

$$\begin{aligned} e^{i\xi \alpha \hat{a}} |n\rangle &= e^{i\xi \alpha \hat{a}} \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{i\xi \alpha \hat{a}} (\hat{a}^+)^n e^{-i\xi \alpha \hat{a}} e^{i\xi \alpha \hat{a}} |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+ + i\xi \alpha)^n e^{i\xi \alpha \hat{a}} |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Учитывая то, что

$$e^{i\xi \alpha \hat{a}} |0\rangle = |0\rangle, \quad (4.2.28)$$

и разложив выражение $(\hat{a}^+ + i\xi \alpha)^n$ в бином Ньютона, получим:

$$e^{i\xi \alpha \hat{a}} |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\hat{a}^+)^{n-k} (i\xi \alpha)^k |0\rangle = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n!}}{k! \sqrt{(n-k)!}} (i\xi \alpha)^k |n-k\rangle. \quad (4.2.29)$$

Преобразуем аналогичным образом выражение $\langle 0 | e^{i\xi \alpha^* \hat{a}^+}$ и подставим все это в формулу (4.2.25): !!!!!

$$\begin{aligned}
\langle n | e^{-i\xi\hat{\Lambda}} | n \rangle &= e^{-\xi^2|\alpha|^2/2} \sum_{k,l=1}^n \frac{n!}{k!l! \sqrt{(n-k)!(n-l)!}} (i\xi\alpha^*)^l (i\xi\alpha)^k \langle n-l | n-k \rangle \\
&= e^{-\xi^2|\alpha|^2/2} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k!)^2 (n-k)!} = e^{-\xi^2|\alpha|^2/2} L_n(\xi^2|\alpha|^2), \quad (4.2.30)
\end{aligned}$$

где L_n — полином Лагерра.

Таким образом,

$$\chi(\xi) = (1 - e^{-\beta}) e^{-\xi^2|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n} L_n(\xi^2|\alpha|^2). \quad (4.2.31)$$

Наконец, с помощью формулы суммирования полиномов Лагерра

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n(x) = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z}, \quad (4.2.32)$$

выражение для характеристической функции приводится к окончательному виду:

$$\chi(\xi) = e^{-\xi^2|\alpha|^2(\langle n \rangle + 1/2)}, \quad (4.2.33)$$

где $\langle n \rangle$ — среднее число квантов в состоянии теплового равновесия [см. формулу (4.2.14)].

Вычислить теперь распределение вероятности для наблюдаемой A не представляет труда:

$$\begin{aligned}
w(A) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2|\alpha|^2(\langle n \rangle + 1/2) + i\xi A} \frac{d\xi}{2\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi|\alpha|^2(\langle n \rangle + 1/2)}} \exp\left(-\frac{A^2}{4|\alpha|^2(\langle n \rangle + 1/2)}\right). \quad (4.2.34)
\end{aligned}$$

Мы показали, тем самым, что:

1. распределения вероятностей для координаты и импульса, а также любых их линейных комбинаций в состоянии теплового равновесия являются нормальными;
2. средние значения этих наблюдаемых в состоянии теплового равновесия равны нулю;
3. их дисперсии отличаются от дисперсий в нулевом состоянии (при $\langle n \rangle = 0$) в $2\langle n \rangle + 1$ раз.

Вообще, с точки зрения поведения линейных наблюдаемых, состояние теплового равновесия очень похоже на нулевое состояние, но “масштабированное” в $\sqrt{2\langle n \rangle + 1}$.

Найдем в заключение явный вид распределений вероятностей для координаты и импульса. Оператор (4.2.23) превращается в оператор координаты q при

$$\alpha = \frac{q_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho}}, \quad (4.2.35)$$

где ρ (без шляпки) — волновое сопротивление осциллятора. Соответственно, распределений вероятностей для координаты равно

$$w(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi q_0^2(\langle n \rangle + 1/2)}} \exp\left(-\frac{q^2}{2q_0^2(\langle n \rangle + 1/2)}\right). \quad (4.2.36)$$

Для импульса p , аналогично, будет

$$\alpha = \frac{\rho q_0}{i\sqrt{2}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar\rho}{2}}, \quad (4.2.37)$$

и

$$w(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho^2 q_0^2(\langle n \rangle + 1/2)}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\rho^2 q_0^2(\langle n \rangle + 1/2)}\right). \quad (4.2.38)$$

Задание Рассмотреть квантовое состояние осциллятора, которое получается из состояния теплового равновесия в результате действия заданной классической силы $F(t)$. Найти среднее значение и дисперсию числа квантов, а также распределения вероятностей для координаты и импульса. Более сложное задание: найти распределение вероятностей для числа квантов.

4.3 Динамическое поведение квантового осциллятора с диссипацией

4.3.1 Диссипация обязательно сопровождается флуктуациям

В реальной жизни состояние теплового равновесия является скорее исключением, чем правилом. Однако все системы имеют тенденцию *стремиться* к состоянию теплового равновесия (диссипировать). Диссипация классического осциллятора описывается, как известно, при помощи члена в уравнении движения, пропорционального первой производной от координаты:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq(t)}{dt} + \omega_0^2 q(t) = 0, \quad (4.3.1)$$

где γ — декремент затухания.

Возникает соблазн, используя аналогию между классическими уравнениями движения и уравнениями для операторов в картине Гейзенберга, просто расставить здесь шляпки и получить следующее уравнение движения для оператора координаты гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2\hat{q}(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\hat{q}(t)}{dt} + \omega_0^2 \hat{q}(t) = 0. \quad (\text{неправильно!}) \quad (4.3.2)$$

Решение этого уравнения, как в классическом, так и в квантовом случаях, имеет довольно громоздкий вид. Поэтому мы рассмотрим здесь простой предельный случай, когда затухание мало: $\gamma \ll \omega_0$. Формулы при этом упрощаются, а все существенные физические выводы остаются в силе.

В этом предельном случае решение уравнения (4.3.2) имеет вид:

$$\hat{q}(t) = \left(\hat{q} \cos \omega_0 t + \frac{\hat{p}}{\rho} \sin \omega_0 t \right) e^{-\gamma t}. \quad (\text{неправильно!}) \quad (4.3.3)$$

Для оператора импульса, соответственно, получим:

$$\hat{p}(t) = \rho \frac{d\hat{q}(t)}{dt} = (-\rho \hat{q} \sin \omega_0 t + \hat{p} \cos \omega_0 t) e^{-\gamma t}. \quad (\text{неправильно!}) \quad (4.3.4)$$

Проблема состоит в том, что при $t \rightarrow \infty$ операторы как координаты, так и импульс стремятся к нулю. Это означает, что и все их моменты, в том числе и дисперсии, также стремятся к нулю, и при любом сколь угодно большом начальном значении неопределенностей координаты и импульса когда нибудь наступит момент, когда перестанет выполняться соотношение неопределенностей, то есть будет

$$\Delta q \Delta p < \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{неправильно!}) \quad (4.3.5)$$

Более формально можно убедиться в этом, посчитав коммутатор операторов $\hat{q}(t)$ и $\hat{p}(t)$:

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = [\hat{q}, \hat{p}] e^{-2\gamma t} = i\hbar e^{-2\gamma t}. \quad (\text{неправильно!}) \quad (4.3.6)$$

В то же время из общей теории известно, что коммутатор координаты и импульса должен сохраняться:

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = [\hat{u}^+(t)\hat{q}\hat{u}(t), \hat{u}^+(t)\hat{p}\hat{u}(t)] = \hat{u}^+(t)[\hat{q}, \hat{p}]\hat{u}(t) = \hat{u}^+(t)i\hbar\hat{u}(t) = i\hbar. \quad (4.3.7)$$

Чтобы разобраться с этим “парадоксом”, достаточно вспомнить, что диссипация — это на самом деле связь системы с окружением (термостатом) — огромным количеством внешних степеней свободы, которые можно считать находящимися в состоянии теплового равновесия. В процессе эволюции наша система действует на них с некоторой силой, совершает работу и соответственно теряет энергию. Но и степени свободы термостата также действуют обратно на систему. Поскольку соответствующая сила является суммой огромного числа действующих вразнобой сил от отдельных степеней свободы термостата, то она носит флуктуационный характер.

В классической физике можно (на бумаге) предположить, что окружающее пространство заморожено до нуля, степени свободы термостата находятся в покое и эта флуктуационная сила равна нулю. Тогда мы приходим к уравнению (4.3.1). Однако в квантовом случае даже при $T = 0$ остаются нулевые колебания, и поэтому в правой части уравнения (4.3.2) надо *всегда* писать некоторую силу. Она, как мы увидим позже, и ответственна за выполнение соотношения неопределенностей.

4.3.2 Математическое отступление: приближение вращающейся поляризации

Приближение вращающейся поляризации является стандартным методом рассмотрения колебательных систем с несколькими степенями свободы. Фактически это метод медленно меняющихся амплитуд (ММА), только поданный в несколько другой упаковке. Позже мы будем использовать его для анализа осциллятора, связанного с термостатом. А пока рассмотрим простейший случай двух связанных осцилляторов.

Гамильтониан системы из двух связанных осцилляторов имеет вид:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\omega_1 \hat{p}_1^2}{2\rho_1} + \frac{\rho_1 \omega_1 \hat{q}_1^2}{2} + \frac{\omega_2 \hat{p}_2^2}{2\rho_2} + \frac{\rho_2 \omega_2 \hat{q}_2^2}{2} - \kappa \hat{q}_1 \hat{q}_2, \quad (4.3.8)$$

где $\rho_{1,2}$ и $\omega_{1,2}$ — волновые сопротивления и собственные частоты осцилляторов, $\hat{q}_{1,2}$ и $\hat{p}_{1,2}$ — их координаты и импульсы, κ — коэффициент связи.

Переходя от операторов координаты и импульса к операторам рождения и уничтожения $\hat{a}_{1,2}^+$ и $\hat{a}_{1,2}$ (по обычным правилам), получим, что

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega_1 \left(\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(\hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right) - \hbar\Omega (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^+) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+), \quad (4.3.9)$$

где

$$\Omega = \frac{\kappa}{2\sqrt{\rho_1\rho_2}}. \quad (4.3.10)$$

Отсюда получается уравнение движения для операторов уничтожения (в картине Гейзенберга):

$$\frac{d\hat{a}_1(t)}{dt} + i\omega_1\hat{a}_1(t) = i\Omega[\hat{a}_2(t) + \hat{a}_2^+(t)], \quad (4.3.11a)$$

$$\frac{d\hat{a}_2(t)}{dt} + i\omega_2\hat{a}_2(t) = i\Omega[\hat{a}_1(t) + \hat{a}_1^+(t)], \quad (4.3.11b)$$

Эта простая система уравнений решается точно. Однако она интересует нас не сама по себе, а как пример для демонстрации приближения вращающейся поляризации. Предположим, что связь между осцилляторами мала, так что

$$\Omega \ll \omega_{1,2}. \quad (4.3.12)$$

Будем решать систему уравнений (4.3.11) методом последовательных приближений. Сначала предположим, что связь между осцилляторами отсутствует, $\Omega = 0$. В этом случае решение будет иметь вид:

$$\hat{a}_1(t) = \hat{a}_1 e^{-i\omega_1 t}, \quad (4.3.13a)$$

$$\hat{a}_2(t) = \hat{a}_2 e^{-i\omega_2 t}. \quad (4.3.13b)$$

$$(4.3.13c)$$

Подставим это решение в правые части уравнений (4.3.11):

$$\frac{d\hat{a}_1(t)}{dt} + i\omega_1\hat{a}_1(t) = i\Omega[\hat{a}_2 e^{-i\omega_2 t} + \hat{a}_2^+ e^{i\omega_2 t}], \quad (4.3.14a)$$

$$\frac{d\hat{a}_2(t)}{dt} + i\omega_2\hat{a}_2(t) = i\Omega[\hat{a}_1 e^{-i\omega_1 t} + \hat{a}_1^+ e^{i\omega_1 t}], \quad (4.3.14b)$$

и проинтегрируем эти уравнения. Получится решение первого (по величине константы связи Ω) приближения:

$$\hat{a}_1(t) = \hat{a}_1 e^{-i\omega_1 t} + \Omega \left(\frac{e^{-i\omega_2 t} - e^{-i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2} \hat{a}_2 + \frac{e^{i\omega_2 t} - e^{-i\omega_1 t}}{\omega_1 + \omega_2} \hat{a}_2^+ \right), \quad (4.3.15a)$$

$$\hat{a}_2(t) = \hat{a}_2 e^{-i\omega_2 t} + \Omega \left(\frac{e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1} \hat{a}_1 + \frac{e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}}{\omega_2 + \omega_1} \hat{a}_1^+ \right). \quad (4.3.15b)$$

Предположим теперь, что частоты осцилляторов близки друг к другу:

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}. \quad (4.3.16)$$

В этом случае слагаемые с $\hat{a}_{1,2}^+$ в правых частях уравнений (4.3.15) будут много меньше, чем слагаемые с $\hat{a}_{1,2}$. Поэтому их можно отбросить, получив *укороченное решение*

$$\hat{a}_1(t) = \hat{a}_1 e^{-i\omega_1 t} + \Omega \frac{e^{-i\omega_2 t} - e^{-i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2} \hat{a}_2, \quad (4.3.17a)$$

$$\hat{a}_2(t) = \hat{a}_2 e^{-i\omega_2 t} + \Omega \frac{e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1} \hat{a}_1. \quad (4.3.17b)$$

От этого решения можно вернуться обратно к исходным уравнениям (4.3.11), заменив их на *укороченные уравнения*, или *уравнения в приближении вращающейся поляризации*:

$$\frac{d\hat{a}_1(t)}{dt} + i\omega_1\hat{a}_1(t) = i\Omega\hat{a}_2(t), \quad (4.3.18a)$$

$$\frac{d\hat{a}_2(t)}{dt} + i\omega_2\hat{a}_2(t) = i\Omega\hat{a}_1(t). \quad (4.3.18b)$$

Нетрудно также построить гамильтониан *в приближении вращающейся поляризации*, приводящий к таким уравнениям:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega_1 \left(\hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(\hat{a}_2^+\hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right) - \hbar\Omega(\hat{a}_1\hat{a}_2^+ + \hat{a}_1^+\hat{a}_2). \quad (4.3.19)$$

Эти рассуждения справедливы, очевидно, не только для двух связанных осцилляторов, но и для любого их числа, если выполняются два условия: коэффициенты связи достаточно малы [условие (4.3.12)] и частоты осцилляторов близки друг к другу [условие (4.3.16)]. В это случае в уравнениях движения для операторов уничтожения \hat{a} можно выкинуть все слагаемые, пропорциональные \hat{a}^+ [см. уравнения (4.3.18)], а в гамильтониане - все слагаемые вида $\hat{a}_j\hat{a}_k$ и $\hat{a}_j^+\hat{a}_k^+$, где j, k — номера осцилляторов [см. формулу (4.3.19)].

4.3.3 Простой метод описания затухания в осцилляторе

Используя логику раздела 4.3.1, можно построить очень простой способ рассмотрения осциллятора с диссипацией, с помощью которого получить многие важные результаты.

Мы будем исходить из уравнений движения для операторов рождения и уничтожения квантов (можно использовать и уравнение для координаты, как в предыдущем разделе, но с операторами рождения и уничтожения все выкладки оказываются несколько проще).

В осцилляторе без диссипации уравнение движения (в картине Гейзенберга) для оператора уничтожения $\hat{a}(t)$ имеет вид:

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i\omega_o\hat{a}(t). \quad (4.3.20)$$

(уравнение для оператора уничтожения получается эрмитовым сопряжением). “Наивное” введение диссипации (как в предыдущем разделе) даст:

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -(i\omega_o + \gamma)\hat{a}(t). \quad (\text{неправильно!}) \quad (4.3.21)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}e^{-(i\omega_o + \gamma)t}. \quad (\text{неправильно!}) \quad (4.3.22a)$$

Для оператора уничтожения, соответственно, будет:

$$\hat{a}^+(t) = \hat{a}^+ e^{(i\omega_0 - \gamma)t}. \quad (\text{неправильно!}) \quad (4.3.22b)$$

То, что все это неправильно, видно хотя бы из того, что коммутатор полученных операторов не сохраняется и, более того, стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$:

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^+(t)] = [\hat{a}, \hat{a}^+] e^{-2\gamma t} = e^{-2\gamma t}. \quad (\text{неправильно!}) \quad (4.3.23)$$

Вспомнив теперь рассуждения предыдущего раздела о связи между диссипацией и флуктуациями, введем в правую часть уравнения (4.3.21) дополнительное слагаемое $\hat{f}(t) + \hat{g}(t)$ (обратное воздействие термостата):

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -(i\omega_0 + \gamma)\hat{a}(t) + \hat{f}(t) + \hat{g}(t). \quad (4.3.24)$$

Здесь $\hat{f}(t)$ (обратное воздействие термостата) — это сумма большого числа слагаемых, пропорциональных операторам уничтожения внутренних степеней свободы термостата, а $\hat{g}(t)$ — слагаемых, пропорциональных операторам рождения этих степеней свободы.

Перейдем теперь в приближение вращающейся поляризации, отбросив слагаемое $\hat{g}(t)$:

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -(i\omega_0 + \gamma)\hat{a}(t) + \hat{f}(t). \quad (4.3.25)$$

Решения этого уравнения и уравнения, эрмитово сопряженного к нему, имеют вид:

$$\hat{a}(t) = [\hat{a} e^{-\gamma t} + \hat{b}(t)] e^{-i\omega_0 t}, \quad (4.3.26a)$$

$$\hat{a}^+(t) = [\hat{a}^+ e^{-\gamma t} + \hat{b}^+(t)] e^{i\omega_0 t}, \quad (4.3.26b)$$

где

$$\hat{b}(t) = e^{-\gamma t} \int_0^\infty \hat{f}(t') e^{(i\omega_0 + \gamma)t'} dt'. \quad (4.3.27)$$

Важно то, что $\hat{b}(t)$ представляет собой сумму слагаемых, пропорциональных операторам уничтожения внутренних степеней свободы термостата. Поэтому если температура термостата равна нулю, то есть он находится в нулевом состоянии $|0\rangle$, то

$$\hat{b}(t)|0\rangle \equiv 0. \quad (4.3.28)$$

Используя условие, что коммутатор операторов $\hat{a}(t)$ и $\hat{a}^+(t)$ должен быть равен единице в любой момент времени, нетрудно также найти коммутатор операторов $\hat{b}(t)$ и $\hat{b}^+(t)$:

$$1 = [\hat{a}(t), \hat{a}^+(t)] = [\hat{a}, \hat{a}^+] e^{-2\gamma t} + [\hat{b}(t), \hat{b}^+(t)] = e^{-2\gamma t} + [\hat{b}(t), \hat{b}^+(t)]. \quad (4.3.29)$$

Следовательно,

$$[\hat{b}(t), \hat{b}^+(t)] = 1 - e^{-2\gamma t}. \quad (4.3.30)$$

Как выясняется, формул (4.3.26), (4.3.28), (4.3.30) достаточно того, чтобы получить многие важные особенности поведения осциллятора с диссипацией в случае, когда температура термостата равна нулю.

Динамическое поведение среднего значения и дисперсии числа квантов в осцилляторе с диссипацией Рассмотрим осциллятор, подключенный к термостату с нулевой температурой. Пусть в начальный момент времени среднее значение числа квантов в нем было равно \bar{n} , а дисперсия — $(\Delta n)^2$. Очевидно, что в результате диссипации обе эти величины с течением времени будут стремиться к нулю. Вычислим, как это будет происходить.

Обозначим начальную волновую функцию осциллятора $|\psi\rangle$. Термостат, по предположению, находится в состоянии $|0\rangle$. Тогда для среднего значения будет:

$$\bar{n}(t) = \langle 0|\psi|\hat{a}^+(t)\hat{a}(t)|\psi|0\rangle = \langle 0|\psi|\left(\hat{a}^+e^{-\gamma t} + \hat{b}^+(t)\right)\left(\hat{a}e^{-\gamma t} + \hat{b}(t)\right)|\psi|0\rangle. \quad (4.3.31)$$

С учетом условия (4.3.28), получим:

$$\bar{n}(t) = \langle 0|\psi|\hat{a}^+e^{-\gamma t}\hat{a}e^{-\gamma t}|\psi|0\rangle = \bar{n}e^{-2\gamma t}. \quad (4.3.32)$$

Для среднего квадрата числа квантов будет:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^2(t) \rangle &= \langle 0|\psi|\left(\hat{a}^+(t)\hat{a}(t)\right)^2|\psi|0\rangle \\ &= \langle 0|\psi|\left(\hat{a}^+e^{-\gamma t} + \hat{b}^+(t)\right)\hat{a}(t)\hat{a}^+(t)\left(\hat{a}e^{-\gamma t} + \hat{b}(t)\right)|\psi|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Вновь используя формулу (4.3.28), получим:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^2(t) \rangle &= \langle 0|\psi|\hat{a}^+\hat{a}(t)\hat{a}^+(t)\hat{a}|\psi|0\rangle e^{-2\gamma t} \\ &= \langle 0|\psi|\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+\hat{a}|\psi|0\rangle e^{-4\gamma t} + \langle 0|\psi|\hat{a}^+\hat{b}(t)\hat{b}^+(t)\hat{a}|\psi|0\rangle e^{-2\gamma t}. \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

Второе слагаемое вычисляется с помощью коммутатора (4.3.30):

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi|\hat{a}^+\hat{b}(t)\hat{b}^+(t)\hat{a}|\psi|0\rangle &= \langle 0|\psi|\hat{a}^+\left(\hat{b}^+(t)\hat{b}(t) + 1 - e^{-2\gamma t}\right)\hat{a}|\psi|0\rangle \\ &= \langle 0|\psi|\hat{a}^+\hat{a}|\psi|0\rangle(1 - e^{-2\gamma t}). \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

В итоге получим:

$$\langle \hat{n}^2(t) \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle e^{-4\gamma t} + \bar{n}e^{-2\gamma t}(1 - e^{-2\gamma t}). \quad (4.3.36)$$

Дисперсия, соответственно, равна

$$(\Delta n(t))^2 = \langle \hat{n}^2(t) \rangle - \bar{n}^2 = (\Delta n)^2 e^{-4\gamma t} + \bar{n}e^{-2\gamma t}(1 - e^{-2\gamma t}) \quad (4.3.37)$$

Можно отметить любопытную аналогию между поведением числа квантов в осцилляторе с диссипацией и каких-то одинаковых объектов (шариков), случайным образом высыпаящихся из резервуара. Если темп высыпания шариков таков, что через время t из начальных n_0 штук в среднем остается n , то дисперсия числа шариков в этот момент будет равна $n(1 - n/n_0)$ (дисперсия биномиального распределения). Эта величина в точности соответствует второму слагаемому в формуле (4.3.37).

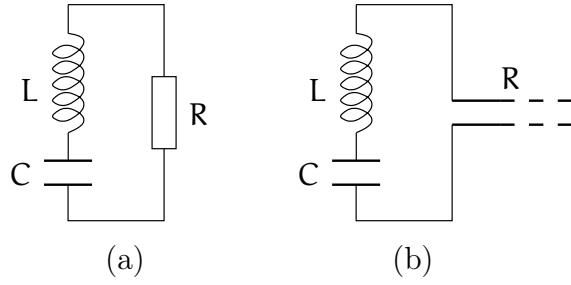


Рис. 4:

4.4 Флуктуационно-диссипационная теорема

4.4.1 Введение

Флуктуационно-диссипационная теорема (ФДТ) описывает фундаментальную связь между диссипацией и флуктуациями в любых квантовых системах. Часто она называется также теоремой Каллена-Вельтона, по имени ее авторов. Частным случаем этой теоремы является известная формула Найквиста:

$$S = 2k_B T R. \quad (4.4.1)$$

Она соответствует ситуации, когда $k_B T \gg \hbar \omega$, где ω — частота наблюдения.

Общее доказательство флуктуационно-диссипационной теоремы довольно сложно. Его можно найти, например, в пятом томе “Теоретической физики” Ландау и Лифшица. Здесь мы рассмотрим несколько упрощенную модель, которая, тем не менее, хорошо отражает суть дела.

Рассмотрим LC-контур с включенным в него сопротивлением R (см. рис. 4(a)). Как известно из курса радиофизики, полубесконечную длинную линию с волновым сопротивлением R невозможно отличить от просто сопротивления R , если проводить измерения только на ее конце. Поэтому мы заменим включенное в контур сопротивление такой полубесконечной длинной линией (рис. 4(b)).

Выпишем уравнения Кирхгофа для этой системы:

$$L \frac{d^2 \hat{q}(t)}{dt^2} + \frac{\hat{q}(t)}{C} = \hat{U}(0, t), \quad (4.4.2a)$$

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} + \hat{I}(0, t) = 0. \quad (4.4.2b)$$

Здесь $\hat{U}(0, t)$ и $\hat{I}(0, t)$ — операторы напряжения и тока в длинной линии (в картине Гейзенберга), взятые в точке $x = 0$, где она подключена к контуру. В соответствии с формулами (3.1.28), они равны

$$\hat{U}(0, t) = \hat{U}_R(-vt) + \hat{U}_L(vt), \quad (4.4.3a)$$

$$\hat{I}(0, t) = \frac{1}{R} (\hat{U}_R(-vt) - \hat{U}_L(vt)), \quad (4.4.3b)$$

Если теперь подставить выражения (4.4.3) в (4.4.2), умножить второе из уравнений (4.4.2) на R и сложить эти два уравнения, то получится знакомое уравнение

движение для осциллятора с диссипацией, но с дополнительным членом в правой части:

$$L \frac{d^2 \hat{q}(t)}{dt^2} + R \frac{d\hat{q}(t)}{dt} + \frac{\hat{q}(t)}{C} = \hat{U}_{\text{fluct}}(t), \quad (4.4.4)$$

где

$$\hat{U}_{\text{fluct}}(t) = 2\hat{U}_L(vt). \quad (4.4.5)$$

Важно то, что в силу принципа причинности волна, бегущая по линии влево, “ничего не знает” о том, что ждет ее впереди — то ли там линия продолжается до бесконечности, то ли она обрывается каким-то граничным условием (в нашем случае — контуром). Поэтому эта волна не зависит от начального состояния контура, а только от начального состояния самой линии. Более того, она может быть записана в том же виде, что и волна, бегущая влево в бесконечной линии [см. формулу (3.1.41b)]:

$$\hat{U}_L(vt) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar \omega R}{2}} \left(\hat{a}_L(\omega) e^{-i\omega t} + \hat{a}_L^+(\omega) e^{i\omega t} \right) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (4.4.6)$$

Мы продемонстрировали тем самым, как связь квантовой системы (в нашем случае - LC-контура) с термостатом (системой с очень большим числом степеней свободы; в нашем случае — с длинной линией) приводит к появлению диссипативного члена в уравнении движения. “В нагрузку” наша квантовая система получила также флуктуационный член в свое правой части, поведение которой определяется начальным состоянием термостата. Нашей задачей теперь является вычисление спектральной плотности этого шума.

4.4.2 Случай нулевой температуры

Как правило при рассмотрении диссипации предполагается, что термостат находится в состоянии теплового равновесия с некоторой температурой T . Начнем с простейшего случая, когда эта температура равна нулю.

Вычислим сначала *несимметризованную* корреляционную функцию случайного процесса $\hat{U}_{\text{fluct}}(t)$ (она не имеет большого физического смысла, но из нее легко найти “настоящую” корреляционную функцию).

$$\begin{aligned} B_{\text{ns}}(t) &= \langle \hat{U}_{\text{fluct}}(0) \hat{U}_{\text{fluct}}(t) \rangle = 4 \langle \hat{U}_L(0) \hat{U}_L(vt) \rangle \\ &= 4 \int_0^\infty \frac{\hbar \sqrt{\omega \omega'} R}{2} \left\langle \left(\hat{a}_L(\omega) + \hat{a}_L^+(\omega) \right) \left(\hat{a}_L(\omega') e^{-i\omega' t} + \hat{a}_L^+(\omega') e^{i\omega' t} \right) \right\rangle \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Учтем теперь то, что по предположению температура термостата равна нулю, так что он находится в нулевом состоянии:

$$B_{\text{ns}}(t) = 2\hbar R \int_0^\infty \sqrt{\omega \omega'} \langle 0 | \hat{a}_L(\omega) \hat{a}_L^+(\omega') | 0 \rangle e^{i\omega' t} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}. \quad (4.4.8)$$

Дальше, как обычно, используем коммутатор (3.1.34):

$$\langle 0 | \hat{a}_L(\omega) \hat{a}_L^\dagger(\omega') | 0 \rangle = \langle 0 | \left(\hat{a}_L^\dagger(\omega') \hat{a}_L(\omega) + 2\pi\delta(\omega - \omega') \right) | 0 \rangle, \quad (4.4.9)$$

и в результате получим:

$$B_{\text{ns}}(t) = 2\hbar R \int_0^\infty \sqrt{\omega\omega'} 2\pi\delta(\omega - \omega') e^{i\omega't} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = 2\hbar R \int_0^\infty \omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (4.4.10)$$

“Истинная” (симметризованная) корреляционная функция получается отсюда по простому правилу:

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{1}{2} \left[\langle \hat{U}_{\text{fluct}}(0) \hat{U}_{\text{fluct}}(t) \rangle + \langle \hat{U}_{\text{fluct}}(t) \hat{U}_{\text{fluct}}(0) \rangle \right] = \frac{1}{2} \left[B_{\text{ns}}(t) + B_{\text{ns}}(-t) \right] \\ &= \hbar R \int_0^\infty \omega (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \frac{d\omega}{2\pi} = \hbar R \int_{-\infty}^\infty |\omega| e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Получился сингулярный интеграл, что, впрочем, не мешает вычислить соответствующую спектральную плотность, используя теорему Винера-Хинчина:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^\infty B(t) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \hbar |\omega| R. \quad (4.4.12)$$

Мы показали тем самым, что сопротивление R всегда, даже при нулевой температуре, является источником шумовой Э.Д.С. Спектральная плотность этой Э.Д.С при нулевой температуре описывается формулой (4.4.12).

Задание: **попытаться** вычислить среднюю равновесную энергию в колебательном контуре с диссипацией, используя формулу (4.4.12). Объяснить полученный результат.

4.4.3 Случай ненулевой температуры

При ненулевой температуре каждая из собственных мод линии передачи находится в состоянии теплового равновесия (4.2.10). Из-за того, что в (полу)бесконечной линии эти моды образуют непрерывный спектр, здесь вновь возникают некоторые математические сложности. Поэтому начнем со случая линии конечной длины X , вычислим для нее корреляционную функцию шума $\hat{U}_{\text{fluct}}(t)$, и затем перейдем к пределу бесконечной линии.

Из формулы (3.1.29b) следует, что

$$\begin{aligned} B_{\text{ns}}(t) &= \langle \hat{U}_{\text{fluct}}(0) \hat{U}_{\text{fluct}}(t) \rangle = 4 \langle \hat{U}_L(0) \hat{U}_L(\nu t) \rangle \\ &= 4 \sum_{k,k'=1}^\infty \frac{\hbar \sqrt{\omega_k \omega_{k'}} R \nu}{2X} \left\langle \left(\hat{a}_{kL} + \hat{a}_{kL}^\dagger \right) \left(\hat{a}_{k'L} e^{-i\omega_{k'} t} + \hat{a}_{k'L}^\dagger e^{i\omega_{k'} t} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Состояние теплового равновесия представляет собой смесь состояний с заданным числом квантов, поэтому в этом состоянии

$$\langle \hat{a}_{kL} \hat{a}_{k'L} \rangle = 0, \quad (4.4.14a)$$

$$\langle \hat{a}_{kL}^+ \hat{a}_{k'L}^+ \rangle = 0, \quad (4.4.14b)$$

$$\langle \hat{a}_{kL}^+ \hat{a}_{k'L} \rangle = n_T(\omega_k) \delta_{kk'}, \quad (4.4.14c)$$

$$\langle \hat{a}_{kL} \hat{a}_{k'L}^+ \rangle = [n_T(\omega_k) + 1] \delta_{kk'}, \quad (4.4.14d)$$

где

$$n_T(\omega_k) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}} - 1} \quad (4.4.15)$$

— среднее число квантов в каждой из мод линии [см. формулу (4.2.14)]. Следовательно,

$$B_{ns}(t) = \frac{2\hbar Rv}{X} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \left([n_T(\omega_k) + 1] e^{i\omega_k t} + n_T(\omega_k) e^{-i\omega_k t} \right). \quad (4.4.16)$$

Теперь можно перейти к пределу бесконечной линии, используя правило замены суммы интегралом (3.1.30):

$$B_{ns}(t) = 2\hbar R \int_0^{\infty} \omega \left([n_T(\omega) + 1] e^{i\omega t} + n_T(\omega) e^{-i\omega t} \right) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (4.4.17)$$

Дальше все делается точно так же, как в случае нулевой температуры. Переходим от несимметризованной к симметризованной корреляционной функции:

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{1}{2} [B_{ns}(t) + B_{ns}(-t)] = \hbar R \int_0^{\infty} \omega [2n_T(\omega) + 1] [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \hbar R \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| [2n_T(|\omega|) + 1] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

и от нее, используя теорему Винера-Хинчина, к спектральной плотности:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(t) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \hbar |\omega| R [2n_T(|\omega|) + 1] = \hbar |\omega| R \operatorname{cth} \frac{\hbar|\omega|}{2k_B T}. \quad (4.4.19)$$

Используя известные асимптотики гиперболического котангенса:

$$\operatorname{cth} x|_{x \rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{x}, \quad \operatorname{cth} x|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 1, \quad (4.4.20)$$

легко показать, что при $T = 0$ формула (4.4.19) переходит в (4.4.12), а при $k_B T \gg \hbar\omega$ — в формулу Найквиста (4.4.1).

5 Шумы в неравновесных линейных квантовых системах

5.1 Линейный квантовый двухполосник

5.1.1 Произвольный линейный двухполосник

До сих пор мы предполагали, что термостат находится в состоянии теплового равновесия (при нулевой или ненулевой температуре). Хорошим примером такой системы является, например, обычное сопротивление. Очевидно, что этим простейшим случаем не охватываются все возможные ситуации. Он не охватывает, такие важные (и существенно неравновесные) системы, как квантовые усилители и генераторы, и вообще любые активные (с внутренними источниками энергии) элементы. Более того, пассивные элементы (без внутренних источников энергии) также могут находиться во квантовых состояниях, далеких от теплового равновесия и не описываемых единственным параметром — температурой.

В этом разделе мы попытаемся подойти к вопросу с возможно более общих позиций. Единственное предположение, которое мы будем использовать — это *линейность* отклика нашей системы на внешнее воздействие. Начнем с простейшего случая линейного двухполосника.

Такие устройства, независимо от того, насколько сложно их внутреннее устройство, с точки зрения “внешнего интерфейса” характеризуются единственной функцией *обобщенной восприимчивости* $\chi(t, t')$, задающей связь между внешним воздействием $q(t)$ и откликом на него $\hat{U}(t)$:

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_0(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t, t') q(t') dt', \quad (5.1.1)$$

где $\hat{U}_0(t)$ — значение $\hat{U}(t)$ при отсутствии внешнего воздействия, то есть собственные флуктуации системы. Например, для сопротивления R

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_0(t) + R \frac{dq(t)}{dt}, \quad (5.1.2)$$

где $q(t)$ — пропущенный через сопротивление заряд, а $\hat{U}(t)$ — появившееся в результате напряжение. Соответственно, для него

$$\chi(t, t') = \delta(t - t') \frac{d}{dt'}. \quad (5.1.3)$$

С другой стороны, рассматриваемую нами систему можно характеризовать гамильтонианом вида

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 - q(t)\hat{U}, \quad (5.1.4)$$

где $\hat{\mathcal{H}}_0$ — невозмущенный гамильтониан. Исходя из этого гамильтониана, решение уравнения движения для оператора $\hat{U}(t)$ (в картине эволюции Гейзенберга) может быть представлено в виде ряда теории возмущений:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) = \hat{U}(t) - \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\hat{U}(t), \hat{U}(t')] q(t') \\ + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' [[\hat{U}(t), \hat{U}(t')], \hat{U}(t'')] q(t') q(t'') + \dots \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Из сравнения формул (5.1.5) и (5.1.1) легко видеть, что оператор $\hat{U}(t)$ должен вторично автокоммутировать:

$$[[\hat{U}(t), \hat{U}(t')], \hat{U}(t'')] \equiv 0 \quad \forall t, t', t''. \quad (5.1.6)$$

В этом случае член второго порядка в формуле (5.1.5), а за ним и все остальные, зануляются. Из сравнения формул (5.1.5) и (5.1.1) следует также, что обобщенная восприимчивость выражается через коммутатор $[\hat{U}(t), \hat{U}(t')]$:

$$\chi(t, t') = \begin{cases} \frac{i}{\hbar} [\hat{U}(t), \hat{U}(t')], & t \geq t', \\ 0, & t < t' \quad (\text{в силу принципа причинности}). \end{cases} \quad (5.1.7)$$

Это равенство может быть записано также в форме

$$[\hat{U}(t), \hat{U}(t')] = \begin{cases} -i\hbar\chi(t, t'), & t \geq t', \\ i\hbar\chi(t', t), & t \leq t', \end{cases} \quad (5.1.8)$$

или

$$[\hat{U}(t), \hat{U}(t')] = i\hbar(\chi(t', t) - \chi(t, t')). \quad (5.1.9)$$

Таким образом, мы связали автокоммутатор собственных шумов нашего двухплосника с его функцией обобщенной восприимчивости. Дело осталось за малым - перейти здесь от коммутатора (5.1.9) к корреляционной функции

$$B(t, t') = \frac{1}{2} \langle \hat{U}(t) \hat{U}(t') + \hat{U}(t') \hat{U}(t) \rangle. \quad (5.1.10)$$

Для этого, очевидно, следует использовать какую-то форму соотношения неопределенностей.

Рассмотрим некоторый оператор \hat{Q} , имеющий вид

$$\hat{Q} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) \hat{U}(t) dt, \quad (5.1.11)$$

где $Q(t)$ — произвольная функция. Эта функция может быть и комплексной, так что оператор Q может быть неэрмитовым:

$$\hat{Q}^+ = \int_{-\infty}^{\infty} Q^*(t) \hat{U}(t) dt \neq \hat{Q}. \quad (5.1.12)$$

Вычислим среднее значение “квадрата модуля” оператора \hat{Q} :

$$\langle \hat{\mathcal{Q}}^+ \hat{\mathcal{Q}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Q^*(t) Q(t') \langle \hat{U}(t) \hat{U}(t') \rangle dt dt'. \quad (5.1.13)$$

Входящее в правую часть этой формулы среднее значение может быть выражено через корреляционную функцию (5.1.10) и коммутатор (5.1.9):

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}(t) \hat{U}(t') \rangle &= \frac{1}{2} \langle \hat{U}(t) \hat{U}(t') + \hat{U}(t') \hat{U}(t) + \hat{U}(t) \hat{U}(t') - \hat{U}(t') \hat{U}(t) \rangle \\ &= B(t, t') + \frac{1}{2} [\hat{U}(t), \hat{U}(t')] = B(t, t') + \frac{i\hbar}{2} (\chi(t', t) - \chi(t, t')). \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

С другой стороны, выражение (5.1.13) очевидно является неотрицательным. Следовательно, для любой комплексной функции $Q(t)$ должно выполняться неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q^*(t) Q(t') B(t, t') dt dt' \geq \frac{i\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Q^*(t) Q(t') (\chi(t, t') - \chi(t', t)) dt dt'. \quad (5.1.15)$$

которое и представляет собой искомое универсальное условие для шумов произвольных линейных двухполюсников.

5.1.2 Стационарный линейный двухполюсник

Формула (5.1.15), конечно, хороша свое общностью, но довольно неудобна в использовании в силу своей сложной структуры. Поэтому мы рассмотрим важный частный случай *стационарных* двухполюсников, то есть таких, свойства которых явно не зависят от текущего момента времени. В таких системах как функция обобщенной восприимчивости $\chi(t, t')$, так и корреляционная функция $B(t, t')$ зависят только от разности своих двух аргументов, что позволяет использовать для них спектральное представление:

$$\chi(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (5.1.16a)$$

$$B(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (5.1.16b)$$

где $S(\omega)$ — спектральная плотность шума $\hat{U}(t)$.

Формула (5.1.1) в спектральном представлении имеет простой вид

$$\hat{U}(\omega) = \hat{U}(\omega) + \chi(\omega) q(\omega). \quad (5.1.17)$$

Например, если наш двухполюсник является обычным сопротивлением, то

$$\hat{U}(\omega) = \hat{U}(\omega) + \frac{i\omega R}{q(\omega)}, \quad (5.1.18)$$

следовательно, в этом случае

$$\chi(\omega) = i\omega R. \quad (5.1.19)$$

Если подставить выражения (5.1.16) в формулу (5.1.15), учтя условие симметрии

$$\chi(t', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^*(\omega) e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (5.1.20)$$

то она приобретет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} Q^*(t) e^{i\omega t} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} Q(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \\ & \geq \frac{i\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} Q^*(t) e^{i\omega t} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} Q(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) (\chi(\omega) - \chi^*(\omega)) dt dt'. \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Если

$$Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(t') e^{-i\omega t'} dt' \quad (5.1.22)$$

— спектр функции $Q(t)$ (и тоже произвольная комплексная функция), то выражение (5.1.21) переписется как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Q(\omega)|^2 S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \geq -\hbar \int_{-\infty}^{\infty} |Q(\omega)|^2 \Im \chi(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.1.23)$$

Легко видеть, что необходимым и достаточным условием выполнения этого неравенства при произвольной функции $Q(\omega)$ является выполнение неравенства

$$S(\omega) \geq -\hbar \Im \chi(\omega). \quad (5.1.24)$$

Учтем далее, что $S(\omega)$ и $\chi(\omega)$, как спектры любых действительных функций, удовлетворяют условиям симметрии

$$S(-\omega) = S^*(\omega), \quad (5.1.25a)$$

$$\chi(-\omega) = \chi^*(\omega). \quad (5.1.25b)$$

Кроме того, поскольку $B(t, t') = B(t', t)$, то $S(\omega)$ является действительной функцией, что в сочетании с первым из условий (5.1.25), приводит к ее четности:

$$S(-\omega) = S(\omega). \quad (5.1.26a)$$

В то же время $\Im \chi(\omega)$, в силу второго из условий (5.1.25), является нечетной функцией:

$$\Im \chi(-\omega) = -\Im \chi(\omega). \quad (5.1.26b)$$

Поэтому, если в формуле (5.1.24) заменить ω на $-\omega$, то получится, что

$$S(-\omega) = S(\omega) \geq -\hbar \Im \chi(-\omega) = \hbar \Im \chi(\omega). \quad (5.1.27)$$

Комбинируя эти два неравенства, окончательно получим, что

$$S(\omega) \geq \hbar |\Im \chi(\omega)|. \quad (5.1.28)$$

Например, спектральная плотность шумовой Э.Д.С. на сопротивлении R всегда удовлетворяет неравенству

$$S(\omega) \geq \hbar|\omega||R|. \quad (5.1.29)$$

Формула (5.1.28) очень напоминает флуктуационно-диссипационную теорему. Основное отличие состоит в том, что последняя предполагает, что рассматриваемая система находится в состоянии теплового равновесия. Соотношение же (5.1.28) получено при гораздо более общих предположениях, и справедливо для любого квантового состояния системы. “Платой” за такую общность является то, что это соотношение имеет форму неравенства — то есть оно не задает уровень шума в явном виде (поскольку он зависит от конкретного квантового состояния системы), а лишь определяет его универсальную нижнюю границу.

Очевидной сферой применения полученного неравенства являются активные элементы — например, рабочие среды лазеров с инверсной населенностью. Известно, что их можно представить в виде некоторого отрицательного сопротивления $R < 0$. Из формулы (5.1.29) следует, что такой активный элемент будет шуметь как обычное сопротивление с таким же модулем $|R|$.

5.2 Линейный квантовый четырехполюсник

5.2.1 Общий подход

Более интересной системой, чем двухполюсник, является система, имеющая два “порта” — четырехполюсник. Он интересен прежде всего потому, что четырехполюсниками являются усилители. Очевидно, что должен существовать какой-то фундаментальный квантовый предел для шумов усилителей. Если бы его не было, то можно было бы, например, подключив идеальный не шумящий усилитель к электромагнитному резонатору, наблюдать точную картину колебаний в нем и точно измерить таким образом амплитуду и фазу таких колебаний — что противоречит соотношению неопределенностей.

Четырехполюсник (любой, как классический, так и квантовый) характеризуется матрицей 2×2 обобщенных восприимчивостей

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{11}(t, t') & \chi_{12}(t, t') \\ \chi_{21}(t, t') & \chi_{22}(t, t') \end{pmatrix}, \quad (5.2.1)$$

задающих связь между внешними воздействиями и откликами на два “порта” нашего четырехполюсника (например, вход и выход усилителя):

$$\hat{u}_1(t) = \hat{U}_1(t) + \int_{-\infty}^t \chi_{11}(t, t') q_1(t') dt' + \int_{-\infty}^t \chi_{12}(t, t') q_2(t') dt', \quad (5.2.2a)$$

$$\hat{u}_2(t) = \hat{U}_2(t) + \int_{-\infty}^t \chi_{21}(t, t') q_1(t') dt' + \int_{-\infty}^t \chi_{22}(t, t') q_2(t') dt'. \quad (5.2.2b)$$

Продолжая пример с усилителем, можно сказать, что $q_{1,2}$ — это пропущенные через его вход и выход заряды, $\hat{U}_{1,2}(t)$ — созданные в результате этого напряжения, а $\hat{u}_{1,2}(t)$ — это напряжения, которые существуют на входе и выходе усилителя “сами по себе”, то есть его входной и выходной шуму.

Дальше используем точно ту же логику, что в предыдущем разделе. Наш четырехполюсник, если его рассматривать как обычную квантовую систему, характеризуется некоторым гамильтонианом вида

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 - \sum_{j=1}^2 q_j(t) \hat{U}_j, \quad (5.2.3)$$

где $\hat{\mathcal{H}}_0$ — невозмущенный гамильтониан. Соответственно, решение уравнений движения для операторов $\hat{U}_{1,2}(t)$ (в картине эволюции Гейзенберга) может быть представлено в виде ряда теории возмущений:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(t) = & \hat{U}_1(t) - \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left[\hat{U}_1(t), \sum_{j=1}^2 \hat{U}_j(t') q_j(t') \right] \\ & + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \left[\left[\hat{U}_1(t), \sum_{j=1}^2 \hat{U}_j(t') q_j(t') \right], \sum_{j=1}^2 \hat{U}_j(t'') q_j(t'') \right] + \dots, \end{aligned} \quad (5.2.4a)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_2(t) &= \hat{U}_2(t) - \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left[\hat{U}_2(t), \sum_{j=1}^2 \hat{U}_j(t') q_j(t') \right] \\ &+ \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \left[\left[\hat{U}_1(t), \sum_{j=1}^2 \hat{U}_j(t') q_j(t') \right], \sum_{j=1}^2 \hat{U}_j(t'') q_j(t'') \right] + \dots \end{aligned} \quad (5.2.4b)$$

Как и для двухполюсника, из формул (5.2.4) и (5.2.2) следует, что операторы $\hat{U}_{1,2}(t)$ должны вторично коммутировать:

$$[[\hat{U}_j(t), \hat{U}_k(t')], \hat{U}_l(t'')] \equiv 0 \quad \forall t, t', t'', \quad \forall j, k, l = 1, 2. \quad (5.2.5)$$

В этом случае члены второго порядка в формулах (5.2.2), а за ним и все остальные, зануляются, а обобщенные восприимчивости оказываются равными

$$\chi_{jk}(t, t') = \begin{cases} \frac{i}{\hbar} [\hat{U}_j(t), \hat{U}_k(t')], & t \geq t' \quad (j, k = 1, 2), \\ 0, & t < t' \quad (\text{в силу принципа причинности}). \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Аналогично формуле (5.1.7), это равенство может быть записано также в форме

$$[\hat{U}_j(t), \hat{U}_k(t')] = \begin{cases} -i\hbar \chi_{jk}(t, t'), & t \geq t', \\ i\hbar \chi_{kj}(t', t), & t \leq t', \end{cases} \quad (5.2.7)$$

или

$$[\hat{U}_j(t), \hat{U}_k(t')] = i\hbar (\chi_{kj}(t', t) - \chi_{jk}(t, t')). \quad (5.2.8)$$

Далее рассмотрим оператор \hat{Q} , имеющий вид

$$\hat{Q} = \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q_j(t) \hat{U}_j(t) dt, \quad (5.2.9)$$

где $Q_{1,2}(t)$ — произвольные комплексные функции. Вычислим среднее значение “квадрата модуля” оператора \hat{Q} :

$$\langle \hat{Q}^+ \hat{Q} \rangle = \sum_{j,k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t) Q_k(t') \langle \hat{U}_j(t) \hat{U}_k(t') \rangle dt dt'. \quad (5.2.10)$$

Входящие в правую часть средние значения вновь выражаются через корреляционные функции и коммутаторы:

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}_j(t) \hat{U}_k(t') \rangle &= \frac{1}{2} \langle \hat{U}_j(t) \hat{U}_k(t') + \hat{U}_k(t') \hat{U}_j(t) + \hat{U}_j(t) \hat{U}_k(t') - \hat{U}_k(t') \hat{U}_j(t) \rangle \\ &= B_{jk}(t, t') + \frac{1}{2} [\hat{U}_j(t), \hat{U}_k(t')] = B_{jk}(t, t') + \frac{i\hbar}{2} (\chi_{kj}(t', t) - \chi_{jk}(t, t')), \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

где функции

$$B_{jk}(t, t') = \frac{1}{2} \langle \hat{U}_j(t) \hat{U}_k(t') + \hat{U}_k(t') \hat{U}_j(t) \rangle \quad (5.2.12)$$

образуют матрицу корреляционных функций для двух случайных процессов $\hat{U}_1(t)$, $\hat{U}_2(t)$.

Выражение (5.2.10) очевидно является неотрицательным, следовательно, для любых комплексных функций $Q(t)$ должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{jk=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t) Q_k(t') B_{jk}(t, t') dt dt' \\ \geq \frac{i\hbar}{2} \sum_{jk=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t) Q_k(t') (\chi_{jk}(t, t') - \chi_{kj}(t', t)) dt dt', \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

которое, аналогично формуле (5.1.15), представляет собой универсальное условие для шумов произвольных линейных четырехполюсников.

Можно отметить, что фактически мы доказали более общую формулу, чем обещали, а именно не для линейного четырехполюсника, а для линейного $2N$ -полюсника, то есть для системы с произвольным числом внешних интерфейсов. Действительно, все выкладки можно повторить, заменив верхний предел суммирования с 2 на N . В итоге получится формула:

$$\begin{aligned} \sum_{jk=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t) Q_k(t') B_{jk}(t, t') dt dt' \\ \geq \frac{i\hbar}{2} \sum_{jk=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t) Q_k(t') (\chi_{jk}(t, t') - \chi_{kj}(t', t)) dt dt', \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

где $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, ..., $Q_N(t)$ — произвольные функции.

5.2.2 Безынерционные системы

Опять же, полученная формула (5.2.13) слишком громоздка, чтобы ими было удобно пользоваться. Поэтому мы рассмотрим два частных случая, когда она существенно упрощается и ее смысл становится куда более наглядным. Первый из них — это безынерционные системы, то есть мгновенно откликающиеся на внешнее воздействие. Естественно, таких систем в природе не бывает, однако вполне возможны случаи, когда характерные времена, присущие системе, много короче, чем характерные времена изменения сигнала (другими словами, типичные частоты интересующих нас сигналов много меньше типичных частот системы — например, верхней частоты полосы пропускания усилителя).

В этом случае можно положить, что

$$\chi_{jk}(t, t') = \alpha_{jk}(t) \delta(t - t'), \quad (5.2.15a)$$

$$B_{jk}(t, t') = S_{jk}(t) \delta(t - t'), \quad (5.2.15b)$$

где $\alpha_{jk}(t)$ и $S_{jk}(t)$ — функции, характеризующие, соответственно, динамические и флуктуационные свойства нашего четырехполюсника. Отметим, что поскольку $B_{12}(t, t') \equiv B_{21}(t', t)$, то $S_{12}(t) = S_{21}(t)$.

Коэффициенты $S_{jk}(t)$ имеют размерность спектральных плотностей. В стационарном случае, когда они не зависят от времени, они действительно равны спектральным плотностям белых, в данном случае, шумов $\hat{U}_{1,2}$ (недиагональный фактор S_{12} равен перекрестной спектральной плотности этих шумов).

Подставив эти значения обобщенных восприимчивостей и корреляционных функций в формулу (5.2.13), получим, что:

$$\sum_{jk=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t) Q_k(t) S_{jk}(t) dt \geq \frac{i\hbar}{2} \sum_{jk=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t) Q_k(t) (\alpha_{jk}(t) - \alpha_{kj}(t)) dt, \quad (5.2.16)$$

В силу произвольности функций $Q_{1,2}(t)$, необходимым и достаточным условием выполнения этого неравенства является его выполнение для подынтегральных выражений в любой момент времени t :

$$\sum_{jk=1}^2 Q_j^*(t) Q_k(t) S_{jk}(t) \geq \frac{i\hbar}{2} \sum_{jk=1}^2 Q_j^*(t) Q_k(t) (\alpha_{jk}(t) - \alpha_{kj}(t)) \quad \forall t. \quad (5.2.17)$$

Представив функции $Q_{1,2}$ в виде:

$$Q_{1,2} = |Q_{1,2}| e^{i\phi_{1,2}}, \quad (5.2.18)$$

перепишем это неравенство в виде:

$$|Q_1|^2 S_{11} + \left(2S_{12} \cos(\phi_1 - \phi_2) - \hbar(\alpha_{12} - \alpha_{21}) \sin(\phi_1 - \phi_2) \right) |Q_1| |Q_2| + |Q_2|^2 S_{22} \geq 0. \quad (5.2.19)$$

Левая часть последнего выражения является квадратным трехчленом относительно $|Q_1|$. Поэтому необходимым и достаточным условием выполнения этого неравенства является неположительность соответствующего дискриминанта:

$$\left(2S_{12} \cos(\phi_1 - \phi_2) - \hbar(\alpha_{12} - \alpha_{21}) \sin(\phi_1 - \phi_2) \right)^2 - 4S_{11}S_{22} \leq 0. \quad (5.2.20)$$

Это условие должно выполняться при любых значениях $\phi_1 - \phi_2$. Максимум левой части по $\phi_1 - \phi_2$ равен, как легко показать,

$$4S_{12}^2 + \hbar^2(\alpha_{12} - \alpha_{21})^2 - 4S_{11}S_{22}, \quad (5.2.21)$$

следовательно, необходимым и достаточным условием выполнения неравенства (5.2.20) является:

$$S_{11}(t)S_{22}(t) - |S_{12}(t)|^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} (\alpha_{12}(t) - \alpha_{21}(t))^2. \quad (5.2.22)$$

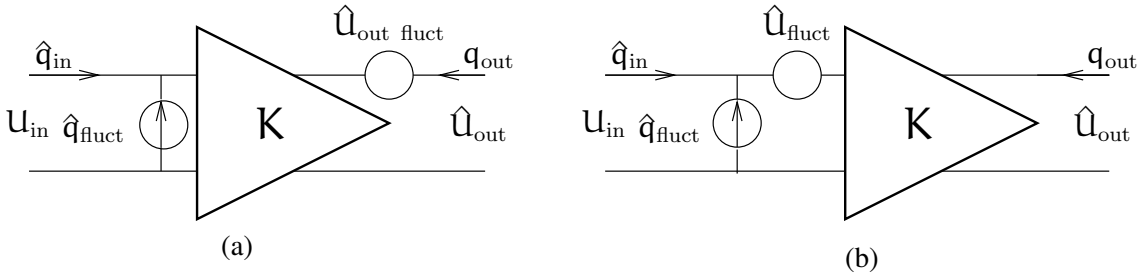


Рис. 5: Идеальный усилитель: (a) — исходная схема; (b) — выходной шум приведен ко входу

Эта простая формула, имеющая вид соотношения неопределенностей, является искомым частным случаем общей формулы (5.2.13) для безынерционного четырехполюсника. Главная особенность этой формулы — это то, что в правую часть входит квадрат *разности* значений коэффициентов передачи “вперед” и “назад” α_{12} и α_{21} . Следовательно, для симметричных систем, у которых $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, соотношение для шумов вырождается в тождественное неравенство

$$S_{11}(t)S_{22}(t) - |S_{12}(t)|^2 \geq 0. \tag{5.2.23}$$

Это означает, что симметричные четырехполюсники могут не шуметь вовсе (это не означает, конечно, что они никогда не шумят, а лишь то, что квантовая механика “разрешает” им не шуметь). С другой стороны, в *активных* системах (типа усилителя) матрица обобщенных восприимчивостей как правило резко несимметрична — сигнал со входа на выход передается с усилением, а обратно с выхода на вход в идеале не передается вообще. Поэтому для таких систем квантовая механика диктует наличие принципиально неустранимых шумов.

5.2.3 Идеальный усилитель

Рассмотрим простой пример — идеальный операционный усилитель. Как известно, он характеризуется очень большим (в идеале бесконечным) входным сопротивлением, большим коэффициентом усиления K , и малыми (в идеале — нулевыми) выходным сопротивлением и коэффициентов передачи обратно с выхода на вход. Предположим также для простоты, что коэффициент K , также как и факторы S_{jk} , не зависят от времени (стационарный случай).

Выберем в качестве входных воздействий $q_{1,2}(t)$ (в соответствии с тем, как это принято в радиофизике) входное напряжение $U_{in}(t)$ и прошедший через выходные клеммы заряд $q_{out}(t)$ (в радиофизике используется ток, но мы должны использовать канонически сопряженные пары — например, напряжение-заряд). Тогда роль откликов будут играть прошедший через входные клеммы заряд $q_{in}(t)$ и напряжение на выходе $U_{out}(t)$ (см. рис. 5(a)). Соответствующие собственные шумы усилителя обозначим $q_{fluct}(t)$ и $U_{fluct\ out}(t)$, их спектральные плотности — S_q и $S_{U_{out}}$, а перекрестную спектральную плотность — $S_{qU_{out}}$ (причина использования “лишних” индексов out объяснится чуть ниже).

К сожалению, возникает некоторая путаница в буквах q и U , поэтому приведем следующую таблицу соответствия (в левой колонке — абстрактные обозначения формул (5.2.2), в правой — конкретные для нашего усилителя:

$$q_1(t) \rightarrow U_{in}(t), \quad q_2(t) \rightarrow q_{out}(t), \quad (5.2.24a)$$

$$\hat{U}_1(t) \rightarrow \hat{q}_{in}(t), \quad \hat{U}_2(t) \rightarrow \hat{U}_{out}(t), \quad (5.2.24b)$$

$$\hat{U}_1(t) \rightarrow \hat{q}_{fluct}(t), \quad \hat{U}_2(t) \rightarrow \hat{U}_{out\ fluct}(t), \quad (5.2.24c)$$

$$S_{11} \rightarrow S_q, \quad S_{12} \rightarrow S_{qU_{out}}, \quad S_{22} \rightarrow S_{U_{out}}. \quad (5.2.24d)$$

Соотношения (5.2.2) для идеального усилителя запишутся следующим образом:

$$\hat{q}_{in}(t) = \hat{q}_{fluct}(t), \quad (5.2.25a)$$

$$\hat{U}_{out}(t) = \hat{U}_{out\ fluct}(t) + KU_{in}(t). \quad (5.2.25b)$$

Соответственно, в данном случае

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0, \quad (5.2.26a)$$

$$\alpha_{21} = K, \quad (5.2.26b)$$

$$(5.2.26c)$$

и соотношение для шумов (5.2.22) примет вид:

$$S_q S_{U_{out}} - S_{qU_{out}}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} K^2. \quad (5.2.27)$$

Как правило, вместо шума $\hat{U}_{out\ fluct}(t)$ используют *приведенный ко входу* шум

$$U_{fluct}(t) = \frac{U_{out\ fluct}(t)}{K}. \quad (5.2.28)$$

Его спектральная плотность равна

$$S_U = \frac{S_{U_{out}}}{K^2}, \quad (5.2.29)$$

а перекрестная с шумом $q_{fluct}(t)$ спектральная плотность —

$$S_{qU} = \frac{S_{qU_{out}}}{K}. \quad (5.2.30)$$

В этих обозначениях соотношение неопределенностей для шумов идеального усилителя принимает вид:

$$S_q S_U - S_{qU}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (5.2.31)$$

5.2.4 Стационарный четырехполюсник

Так же, как и для линейных двухполюсников, для линейных четырехполюсников важным частным случаем линейных четырехполюсников, в котором вид формулы (5.2.13) упрощается, являются *стационарные* системы, для которых как обобщенные восприимчивости $\chi_{jk}(t, t')$, так и спектральные плотности $B_{jk}(t, t')$ зависят только

от разности времен t и t' . В этом случае они могут быть представлены в виде (ср. с формулами (5.1.16)):

$$\chi_{jk}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{jk}(\omega) e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (5.2.32a)$$

$$B_{jk}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} S_{jk}(\omega) e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.2.32b)$$

Подставим выражения (5.2.32) в формулу (5.2.13). При этом она приобретет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(\omega) Q_k(\omega) S_{jk}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \\ & \geq \frac{i\hbar}{2} \sum_{j,k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(\omega) Q_k(\omega) (\chi_{jk}(\omega) - \chi_{kj}^*(\omega)) \frac{d\omega}{2\pi}, \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

где

$$Q_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_j(t') e^{-i\omega t} dt \quad (5.2.34)$$

— спектры функций $Q_j(t)$ (и тоже произвольные комплексные функции).

В силу произвольности функций $Q_j(\omega)$, необходимым и достаточным условием выполнения неравенства (5.2.33) является его выполнение при каждом значении частоты ω :

$$\sum_{j,k=1}^2 Q_j^* Q_k S_{jk}(\omega) \geq \frac{i\hbar}{2} \sum_{j,k=1}^2 Q_j^* Q_k (\chi_{jk}(\omega) - \chi_{kj}^*(\omega)), \quad (5.2.35a)$$

где $Q_{1,2}$ теперь произвольные комплексные числа. Отметим, что если заменить в последней формуле ω на $-\omega$ и учесть свойства симметрии функций $S_{jk}(\omega)$ и $\chi_{jk}(\omega)$, то после простых преобразований мы получим, что должно выполняться также условие

$$\sum_{j,k=1}^2 Q_j^* Q_k S_{jk}(\omega) \geq -\frac{i\hbar}{2} \sum_{j,k=1}^2 Q_j^* Q_k (\chi_{jk}(\omega) - \chi_{kj}^*(\omega)). \quad (5.2.35b)$$

Неравенства (5.2.35) представляют собой условия неотрицательной определенности матриц 2×2 вида

$$\left\| S_{jk}(\omega) \mp \frac{i\hbar}{2} (\chi_{jk}(\omega) - \chi_{kj}^*(\omega)) \right\|. \quad (5.2.36)$$

Необходимыми и достаточными условиями этого являются неравенств

$$S_{11}(\omega) \geq \hbar |\Im \chi_{11}(\omega)|, \quad (5.2.37a)$$

$$S_{22}(\omega) \geq \hbar |\Im \chi_{11}(\omega)|, \quad (5.2.37b)$$

(на самом деле достаточно одного из этих двух, второе с учетом следующих двух выполняется автоматически) и

$$\begin{aligned} & \left(S_{11}(\omega) \pm \hbar \mathfrak{I} \chi_{11}(\omega) \right) \left(S_{22}(\omega) \pm \hbar \mathfrak{I} \chi_{22}(\omega) \right) \\ & \geq \left| S_{12}(\omega) \mp \frac{i\hbar}{2} \left(\chi_{12}(\omega) - \chi_{21}^*(\omega) \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (5.2.37c)$$

(знаки \pm и \mp согласованы, так что на самом деле это два неравенства).

Неравенства (5.2.37a) и (5.2.37b) повторяют неравенство для шумов двухполюсника (5.1.28), отдельно для входа и выхода нашего четырехполюсника. Источником этих шумов является, очевидно, диссипация на входе и на выходе (мнимые части входных и выходных восприимчивостей χ_{11} и χ_{22}).

Принципиально новую информацию несут неравенства (5.2.37c). Частично они тоже связаны с диссипацией, на этот раз внутри четырехполюсника (мнимые части перекрестных восприимчивостей χ_{12} и χ_{21}). Однако они описывают и другой шум, не связанный с диссипацией. Чтобы выявить его, рассмотрим случай, когда диссипация отсутствует, $\chi_{jk} \equiv 0$. В этом случае неравенства (5.2.37a) и (5.2.37b) вырождаются в тождества, а неравенство (5.2.37c) принимает вид:

$$\begin{aligned} & S_{11}(\omega) S_{22}(\omega) - |S_{12}(\omega)|^2 \\ & \geq \frac{\hbar^2}{4} \left(\chi_{12}(\omega) - \chi_{21}(\omega) \right)^2 + \hbar \left| \mathfrak{I} S_{12}(\omega) \left(\chi_{12}(\omega) - \chi_{21}(\omega) \right) \right|. \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

Важно то, что в правую часть этой формулы входит *разность* перекрестных восприимчивостей χ_{12} и χ_{21} , точно так же как и в формулу (5.2.22). Это вполне естественно, так как обе эти формулы представляют собой два частных случая одного и того же общего соотношения. Здесь также квантовая механика диктует наличие принципиально неустранимого шума, связанного с *несимметрией* коэффициентов передачи нашего четырехполюсника “вперед” (от входа к выходу) и “назад” (от выхода к входу).

5.2.5 Пример: интерферометрический датчик смещений

Схема интерферометрического датчика смещений Не следует думать, что построенная теория относится только к радиотехническим схемам — область ее применения куда шире, и охватывает любые системы, у которых есть несколько входов/выходов, отклики на которых *линейно* зависят от внешних воздействий на эти входы/выходы.

Не следует также думать, что предсказанные нами шумы имеют какую-то мистическую существенно квантовую природу. В каждом конкретном случае они создаются какими-то вполне обычными источниками. Однако каждый раз так “оказывается”, что эти шумы удовлетворяют выписанным выше неравенствам.

Что проиллюстрировать оба этих тезиса, рассмотрим простой пример линейной системы — интерферометрический датчик смещений (см. рис. 6). Здесь сигнальный световой луч S , приготовленный в когерентном квантовом состоянии, падает под

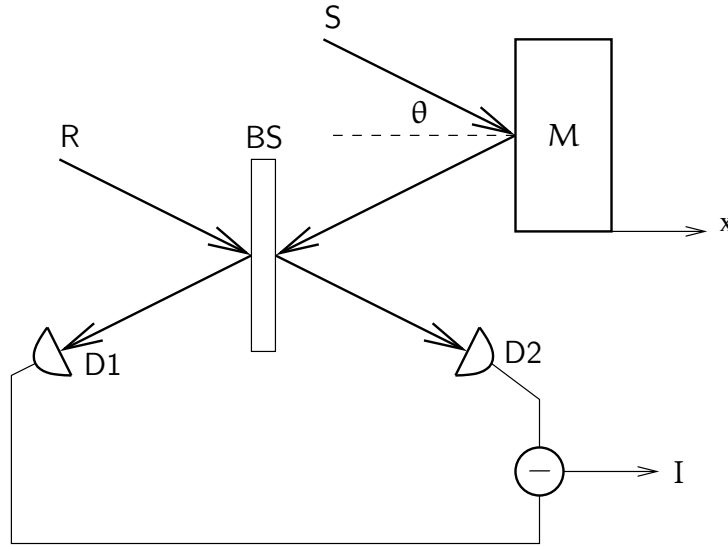


Рис. 6: Схема простейшего оптического интерферометрического датчика смещений

некоторым углом θ на зеркало M , координату x которого требуется определить. Напряженность электрического поля в падающей волне может быть представлена в виде:

$$\hat{E}_{\text{signal}}(t) = (A_0 + \hat{A}(t)) \sin(\omega_0 t + \hat{\phi}(t)), \quad (5.2.39)$$

где A_0 — среднее значение амплитуды напряженности, $\hat{A}(t)$ — квантовые флуктуации амплитуды, их спектральная плотность равна

$$S_A = \frac{2\pi\hbar\omega_0}{c}, \quad (5.2.40)$$

$\hat{\phi}$ — квантовые флуктуации фазы, со спектральной плотностью

$$S_\phi(t) = \frac{\hbar\omega_0}{4W}, \quad (5.2.41)$$

где

$$W = \frac{cA_0^2}{8\pi} \quad (5.2.42)$$

— средняя оптическая мощность в сигнальной волне.

Задание: получить формулы (5.2.40) и (5.2.41), используя результаты раздела 3.4.

При отражении от зеркала луч 1 получает дополнительный сдвиг фазы, пропорциональный x , так что напряженность поля становится равна

$$\hat{E}_{\text{out}}(t) = (A_0 + \hat{A}(t)) \sin(\omega_0 t + \hat{\phi}_{\text{out}}(t)), \quad (5.2.43)$$

где

$$\hat{\phi}_{\text{out}}(t) = \hat{\phi}(t) - \frac{2\omega_0 x(t) \cos \theta}{c}. \quad (5.2.44)$$

Для того, чтобы измерить это сдвиг фазы, сигнальный луч “сбивается” на полупрозрачном зеркале BS с опорным лучом R:

$$\hat{E}_{\text{ref}}(t) = (B_0 + \hat{B}(t)) \cos(\omega_0 t + \phi_{\text{LO}} + \hat{\phi}_{\text{ref}}(t)), \quad (5.2.45)$$

где B_0 среднее значение амплитуды опорной волны, ϕ_{LO} — некоторый постоянный сдвиг фазы (т.н. *гомодинный угол*), $\hat{B}(t)$ и $\hat{\phi}_{\text{LO}}(t)$ — квантовые флуктуации амплитуды и фазы пробной волны. Предполагается, что мощность опорной волны достаточно велика, так что

$$B_0 \gg A_0. \quad (5.2.46)$$

Напряженности поля в двух лучах, идущих от полупрозрачного зеркала, будут при этом равны

$$\hat{E}_1(t) = \frac{\hat{E}_{\text{ref}}(t) + \hat{E}_{\text{out}}(t)}{\sqrt{2}}, \quad (5.2.47a)$$

$$\hat{E}_2(t) = \frac{\hat{E}_{\text{ref}}(t) - \hat{E}_{\text{out}}(t)}{\sqrt{2}}. \quad (5.2.47b)$$

Эти два луча подаются на два фотодетектора. Мы будем считать что последние имеют квантовую эффективность, равную единице, и выдают по одному электрону на каждый падающий квант. Тогда их фототоки будут равны

$$I_{1,2} = \frac{e}{\hbar\omega_0} W_{1,2} = \frac{ec}{4\pi\hbar\omega_0} \overline{(\hat{E}_{1,2}(t))^2}, \quad (5.2.48)$$

где $W_{1,2}$ — значения мощности света, падающие на детекторы, а черта сверху обозначает усреднение по времени больше периода световой волны.

Выходной сигнал Выходным сигналом нашей схемы является разность двух фототоков

$$I_-(t) = \frac{ec}{2\pi\hbar\omega_0} \overline{\hat{E}_{\text{ref}}(t)\hat{E}_{\text{out}}(t)}. \quad (5.2.49)$$

Преобразуем это выражение, отбрасывая члены второго порядка малости по малым членам $\hat{\phi}_{\text{out}}(t)$, $\hat{\phi}_{\text{ref}}(t)$, $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$:

$$I_-(t) = \frac{ec}{4\pi\hbar\omega_0} \left[\left(A_0 B_0 + B_0 \hat{A}(t) + A_0 \hat{B}(t) \right) \cos \phi_{\text{LO}} + A_0 B_0 \left(\hat{\phi}_{\text{out}}(t) - \hat{\phi}_{\text{ref}}(t) \right) \sin \phi_{\text{LO}} \right]. \quad (5.2.50)$$

Постоянная компонента фототока, пропорциональная $A_0 B_0$, нас не интересует, и дальше мы будем ее отбрасывать. Кроме того, в силу условия (5.2.46), могут быть отброшены слагаемые, содержащие квантовые флуктуации опорной волны:

$$I_-(t) = \frac{ecB_0}{4\pi\hbar\omega_0} \left[\hat{A}(t) \cos \phi_{\text{LO}} + A_0 \hat{\phi}_{\text{out}}(t) \sin \phi_{\text{LO}} \right]. \quad (5.2.51)$$

Этот фототок (выходной сигнал нашей системы) может быть записан также в виде, аналогичном формуле для выходного сигнала идеального квантового усилителя (5.2.25b):

$$I_-(t) = I_{\text{fluct}}(t) + Kx(t), \quad (5.2.52)$$

где

$$I_{\text{fluct}}(t) = \frac{ecB_0}{4\pi\hbar\omega_0} \left[\hat{A}(t) \cos\phi_{\text{LO}} + A_0 \hat{\phi} \sin\phi_{\text{LO}} \right] \quad (5.2.53)$$

— выходной шум нашего “усилителя”, а

$$K = -\frac{eA_0B_0 \cos\theta \sin\phi_{\text{LO}}}{2\pi\hbar} \quad (5.2.54)$$

— его “коэффициент усиления”.

Так же, как и при рассмотрении абстрактного идеального усилителя, удобно вместо выходного шума $I_{\text{fluct}}(t)$ использовать приведенный ко входу выходной шум

$$x_{\text{fluct}}(t) = \frac{I_{\text{fluct}}(t)}{K} = -\frac{c}{2\omega_0 \cos\theta} \left(\frac{\hat{A}(t)}{A_0} \cot\phi_{\text{LO}} + \hat{\phi}(t) \right), \quad (5.2.55)$$

при этом формула (5.2.52) запишется в виде:

$$I_-(t) = K[x_{\text{fluct}}(t) + x(t)], \quad (5.2.56)$$

Обратное воздействие В формулах (5.2.25) помимо выходного шума $\hat{U}_{\text{outfluct}}$ фигурировал еще шум \hat{q}_{fluct} , действующий на входе усилителя — обратно на источник сигнала. В нашем случае сигналом является координата x , поэтому должна иметь место некоторая флуктуационная сила, действующая на зеркало M . Очевидно, что в роли этой силы здесь выступают флуктуации силы светового давления на зеркало M .

Сила светового давления равна

$$F_{\text{fluct}}(t) = \frac{2W_{\text{signal}}(t) \cos\theta}{c} = \frac{\overline{(\hat{E}_{\text{signal}}(t))^2} \cos\theta}{2\pi}. \quad (5.2.57)$$

Подставляя сюда формулу (5.2.39) и отбрасывая слагаемые второго порядка малости, получим, что

$$F_{\text{fluct}}(t) = F_0 + F_{\text{fluct}}, \quad (5.2.58)$$

где

$$F_0 = \frac{2W \cos\theta}{c} \quad (5.2.59)$$

— постоянная сила давления, она всегда может быть скомпенсирована и нас не интересует, а

$$F_{\text{fluct}}(t) = \frac{A_0 \hat{A}(t) \cos\theta}{2\pi} \quad (5.2.60)$$

— интересующая нас флуктуационная компонента.

Спектральные плотности шумов Итак, мы вычислили в явном виде шумы нашего “усилителя”. Их физическим источником в данном случае являются амплитудные и фазовые флуктуации в сигнальной оптической волне. Найдём теперь спектральные плотности этих шумов.

Из формул (5.2.40), (5.2.41) и (5.2.55) следует, что спектральная плотность шума $\chi_{\text{fluct}}(t)$ равна

$$S_x = \frac{\hbar\omega_0 c^2}{16W \cos^2 \theta \sin^2 \phi_{LO}}. \quad (5.2.61a)$$

Из формул (5.2.40) и (5.2.60) следует, что спектральная плотность шума $F_{\text{fluct}}(t)$ равна

$$S_F = \frac{4\hbar\omega_0 W \cos^2 \theta}{c^2}. \quad (5.2.61b)$$

Наконец, из формул (5.2.40), (5.2.41), (5.2.55) и (5.2.60) следует, что перекрестная спектральная плотность этих двух шумов равна

$$S_{xF} = -\frac{\hbar}{2} \cot \phi_{LO}. \quad (5.2.61c)$$

Легко видеть, что эти три спектральные плотности точно удовлетворяют неопределённостям

$$S_x S_F - S_{xF}^2 = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (5.2.62)$$

которое повторяет (только в других обозначениях) формулу (5.2.31). Единственное отличие состоит в том, что здесь мы получили равенство. Причина этого очевидна — мы предположили в начале этого раздела, что световая волна находится в когерентном состоянии, и тем самым не содержит никаких дополнительных шумов помимо чисто квантовых неопределённостей.